Exercice I. Déterminer lesquels des ensembles suivants sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.

1. $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x+y-z = x+y+z = 0\}$

2. $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x+y+a = 0 \text{ et } y+3az = 0\}$

3. $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 - z^2 = 0\}$

4. $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | e^x e^y = 0\}$

5. $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | z(x^2+y^2) = 0\}$

Exercice II. On considère les vecteurs de $\mathbb{R}^3$ suivants :

$$\vec{a} = (1,2,1), \qquad \vec{b} = (1,3,2), \qquad \vec{c} = (1,1,0), \qquad \vec{d} = (3,8,5)$$

Soient $F = \mathrm{vect}(\vec{a},\vec{b})$ et $G = \mathrm{vect}(\vec{c},\vec{d})$. Comparer F et G.

Exercice III. Soient P_0, P_1, P_2 et P_3, les polynômes de $\mathbb{R}_2[X]$ définis par :

$$P_0 = \frac{1}{2}(X-1)(X-2), \quad P_1 = \frac{1}{2}X(X-1), \quad P_2 = 2X(X-2), \quad P_3 = \frac{1}{3}(X-1)(X-3)$$

1. Montrer que P_0, P_1, P_2 est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

2. On pose $F = vect\{P_0, P_1\}$ et $G = vect\{P_2, P_3\}$. Calculer $\dim F$, $\dim G$, $\dim(F+G)$, $\dim(F \cap G)$.

Exercice IV. On considère dans $\mathbb{C}^3$ les vecteurs $x_1 = (1,0,1), x_2 = (1,\imath,3)$ et $x_3 = (-2,1,\imath)$. Démontrer qu'ils forment une famille libre.

Exercice V. On considère dans $\mathbb{R}^4$ les vecteurs $x_1 = (1,1,1,2), x_2 = (0,2,0,0), x_3 = (1,-1,2,2)$ et $x_4 = (1,-1,2,3)$.

1. Vérifier que $\mathcal{X} = (x_1,x_2,x_3,x_4)$ est une base de $\mathbb{R}^4$.

2. Calculer dans la base $\mathcal{X}$ les composantes des vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^4$.

3. Calculer dans la base $\mathcal{X}$ les composantes d'un élément quelconque de $\mathbb{R}^4$.

Exercice VI. On considère dans $\mathbb{R}^3$ les trois vecteurs $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\3\\0\end{pmatrix}$. Montrer qu'ils forment une base de $\mathbb{R}^3$ et exprimer les composantes dans cette base d'un vecteur quelconque de $\mathbb{R}^3$.

Exercice VII. Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels, de degré $\leq n$.

1. Soit $P_0, P_1, ..., P_n$ des polynômes de E tels que $\deg P_k = k$ (pour $0 \leq k \leq n$). Montrer que $(P_0, P_1, ..., P_n)$ est une base de E.

2. Soit P un polynôme de degré n. Montrer que $(P, P', \ldots, P^{(n)})$ est une base de E. Soit $a \in \mathbb{R}$; déterminer les composantes du polynôme Q défini par $Q(X) = P(X+a)$ dans la base $(P, P', \ldots, P^{(n)})$.

3. Montrer que la dérivation est un endomorphisme linéaire de E, donner sa matrice dans la base $1, X, \ldots, X^n$. Déterminer son noyau et son image.

Exercice VIII. On note (e_1,e_2,e_3) la base canonique de $\mathbb{C}^3$. On note f l'application linéaire de $\mathbb{C}^3$ dans lui-même telle que $f(e_1) = (2,0,1), f(e_2) = (1,2\imath,1), f(e_3) = (2,\pi,-2)$.

1. Déterminer les images par f de $u_1 = (1,1,1), u_2 = (2,-1,0)$ et $u_3 = (-3,0,2)$.

2. Déterminer la matrice de f par rapport à la base canonique de $\mathbb{C}^3$.

Exercice IX. On rappelle que l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans lui-même est un espace vectoriel pour les opérations usuelles. On considère les quatre fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par les formules

$$\begin{array}{ll} f_1(x) = \mathrm{e}^x \cos x & f_2(x) = \mathrm{e}^x \sin x \\ f_3(x) = \mathrm{e}^{-x} \cos x & f_4(x) = \mathrm{e}^{-x} \sin x \end{array}$$

1. Montrer qu'elles sont linéairement indépendantes. On note E l'espace vectoriel des combinaisons linéaires de ces quatre fonctions.

2. Montrer que si $f \in E$ alors $f' \in E$.

3. On note d l'application de E dans E qui à f associe f'. Vérifier que d est une application linéaire.

4. Déterminer la matrice de d dans la base (f_1, f_2, f_3, f_4) de E.

Exercice X. On désigne par $\mathcal{I}$ le sous-espace de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ des fonctions impaires, et par $\mathcal{P}$ celui des fonctions paires. Montrer que $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) = \mathcal{I} \oplus \mathcal{P}$. Si $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, donner la décomposition explicite $f = f_i + f_p$ avec $f_i \in \mathcal{I}$ et $f_p \in \mathcal{P}$.

Exercice XI. On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $E = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer AB, AC, CA, BC, CD et ED.

2. Pour quelles valeurs de $m \in \mathbb{R}$, la matrice $B'_m = \begin{pmatrix} 4+m & 3-m \\ 2 & 1+m \end{pmatrix}$ vérifie-t-elle $B'_m B = B B'_m$?

3. Déterminer toutes les matrices $M = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ telles que $BM = MB$

Exercice XII. Calculer l'inverse de chacune des matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice XIII. **1.** Calculer $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

2. Soient A et B deux matrices carrées d'ordre n telles que $AB = 0$. Dans quel cas la matrice A peut elle être inversible ?

Exercice XIV. Soit t l'application linéaire de $\mathbb{R}^5$ dont la matrice dans la base canonique est $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 & 5 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & -3 & 2 & 6 \\ 3 & -2 & 4 & 1 & -3 \end{pmatrix}$. Calculer $\ker T$ et $\mathrm{Im} T$.