Algèbre linéaire 2

Exercice 1

Soit $a \in \mathbb{R}$. On considère l'application

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (x+y, ax) \end{array}$$

1. Montrer que f est une application linéaire.
2. Ecrire la matrice représentative A de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$.
3. Déterminer les valeurs de a pour lesquelles A est inversible. Pour ces valeurs, calculer l'inverse de A.
4. Pour ces valeurs, donner l'expression de l'inverse de f.
5. Pour $a = 0$, déterminer le noyau et l'image de f.
6. Quel est le rang de f ?

Exercice 2

Calculer le déterminant et l'inverse de la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 3

On note $\mathbb{C}_2[X]$ l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à deux, à coefficients complexes. On rappelle que $\mathbb{C}_2[X]$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel.

1. Donner une base de $\mathbb{C}_2[X]$ et déterminer sa dimension.

Soit $F = \{P \in \mathbb{C}_2[X] \mid P(1) = 0\}$.

2. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}_2[X]$.
3. Quelle est la dimension de F ?

Soient $U = X^2 - 1$ et $V = X + 1$ deux éléments de $\mathbb{C}_2[X]$, et soit G le sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}_2[X]$ engendré par U et V.

4. Montrer que $\{U, V\}$ est une famille libre. En déduire la dimension de G.
5. Décrire l'espace vectoriel somme $F + G$.
6. Est-ce que $F \cap G$ est un espace vectoriel ? Décrire $F \cap G$.