Corrigé du devoir maison

15 février 2018

On considère la substitution

$$s : \begin{cases} a \mapsto aab \\ b \mapsto a \end{cases}$$

1. Calculer la matrice d'incidence de la substitution s.

$$M_s = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. La substitution s est-elle irréductible ? est-elle primitive ?
La matrice
$$M_s^2 = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$
est à coefficients strictment positifs, donc elle est primtive et donc aussi irréductible. (On pouvait aussi remarquer que le polynôme charactéristique $X^2 - 2X - 1$ est irréductible sur $\mathbb{Q}$, donc d'aprés le cours la substitution est primitive.)

3. La substitution s est-elle de type Pisot unité ?
Les valeurs propres de M_s sont $1 + \sqrt{2} > 1$ et $1 - \sqrt{2} \in]-1, 0[$ (une strictement plus grande que 1 et les autres de modules strictement inférieurs à 1), et le déterminant de la matrice M_s vaut -1, donc la substitution est bien de type Pisot unité.

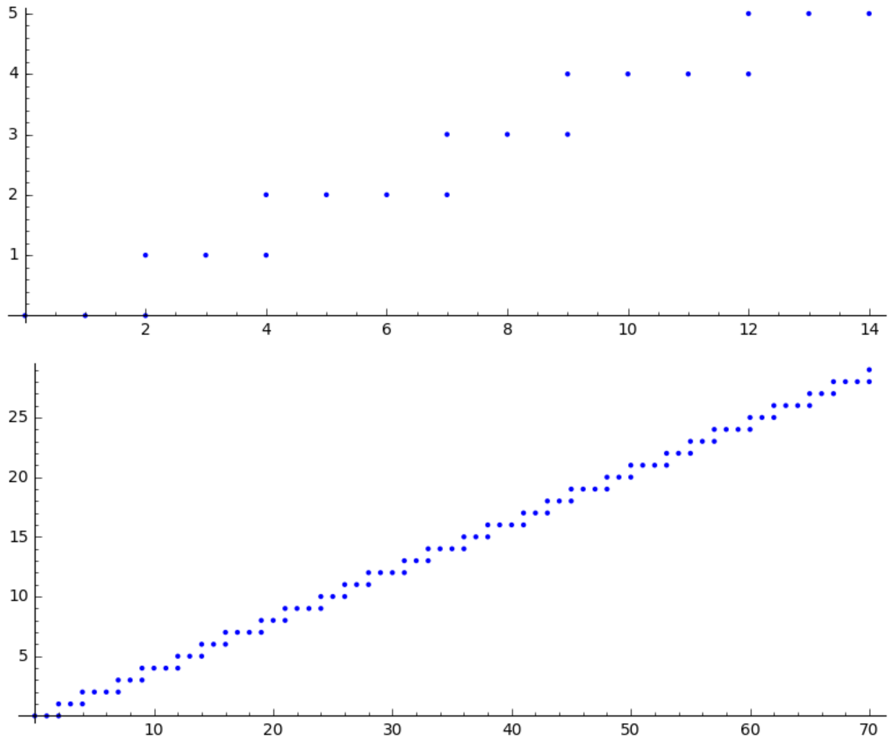
4. Combien y-a-t'il de points fixes infinis à droite ? Combien y-a-t'il de points périodiques bi-infinis ?
L'unique point fixe à droite est $\lim_{n\to\infty} s^n(a)$, car les images des lettres par s sont des mots commençant par a. Il n'y a pas de point fixe à gauche puisque $s(a)$ ne termine pas pas a et $s(b)$ ne termine pas par b. En revanche il y a deux points périodiques, puisque $s^(a) = aabaaba$ termine par a et $s^2(b) = aab$ termine par b. Les points périodiques bi-infinis sont obtenus en concaténant un point fixe à gauche avec un point fixe à droite. On obtient donc les deux points fixes bi-infinis :

$$...aabaabaaabaabaaab.aabaabaaabaabaaabaabaab...$$

$$...aabaabaaabaabaaba.aabaabaaabaabaaabaabaab...$$

5. On considère le mot infini $u \in \{a, b\}^{\mathbb{N}}$ qui est le point fixe de s commençant par la lettre a. Dessiner le début de la ligne discrète D_u.

FIGURE 1 – Début de la ligne discrète



6. On considère l'application linéaire

$$\pi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \mapsto & x - (1+\sqrt{2})y \end{array} \right. .$$

Montrer que l'ensemble $\pi(D_u)$ est borné.

L'application linéaire π est une projection parallelement à la droite propre E_β, où $\beta = 1+\sqrt{2}$ est la plus grande valeur propre de M_s, quitte à identifier $\mathbb{R}$ à un sous-espace de $\mathbb{R}^2$. En effet, le vecteur $(1+\sqrt{2}, 1)$ est un vecteur directeur de E_β, et on a

$$\pi((1+\sqrt{2}, 1)) = (0, 0).$$

D'après le cours, si π est une projection parallèlement à l'espace propre pour la plus grande valeur propre β et que s est de type Pisot, alors $\pi(D_u)$ est borné. (Mais on le redémontre à la question 10.)

7. On pose $\gamma = 1 - \sqrt{2}$, $R_a = \overline{\pi(D_{u,a})}$ et $R_b = \overline{\pi(D_{u,b})}$. Ecrire le système d'équations gIFS que vérifient R_a et R_b, en utilisant γ.

FIGURE 2 – Automate des préfixes

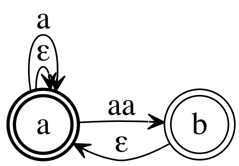
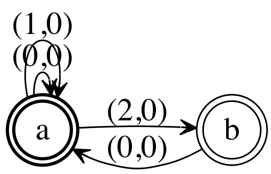


FIGURE 3 – Automate des préfixes abélianisés $\mathcal{A}^{PA}$



On peut écrire la ligne discrète grâce à l'automate des préfixes abélianisés :

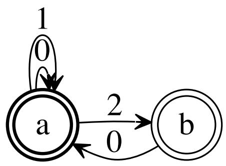
$$D_{u,a} = \left\{ \sum_{i=0}^{n} M_s^{n-i} v_i \;\middle|\; n \in \mathbb{N},\ v_0 v_1 ... v_n \text{ chemin de } a \text{ vers } a \text{ dans l'automate } \mathcal{A}^{PA} \right\}$$

$$D_{u,b} = \left\{ \sum_{i=0}^{n} M_s^{n-i} v_i \;\middle|\; n \in \mathbb{N},\ v_0 v_1 ... v_n \text{ chemin de } a \text{ vers } b \text{ dans l'automate } \mathcal{A}^{PA} \right\}$$

On remarque que l'application π revient à multiplier à gauche par le vecteur ligne $(1, -1-\sqrt{2})$. Mais ce vecteur est un vecteur propre à gauche pour la matrice M_s pour la valeur propre γ, donc pour tout $X \in \mathbb{R}^2$,

$$\pi(M_s X) = \gamma \pi(X).$$

FIGURE 4 – Automate des préfixes abélianisés projetés $\mathcal{A}^{PAP}$



On peut écrire le projeté de la ligne discrète grâce à l'automate des préfixes abélianisés projetés :

$$\pi(D_{u,a}) = \left\{ \sum_{i=0}^{n} v_i \gamma^{n-i} \;\middle|\; n \in \mathbb{N},\ v_0 v_1 ... v_n \text{ chemin de } a \text{ vers } a \text{ dans l'automate } \mathcal{A}^{PAP} \right\}$$

$$\pi(D_{u,b}) = \left\{ \sum_{i=0}^{n} v_i \gamma^{n-i} \;\middle|\; n \in \mathbb{N},\ v_0 v_1 ... v_n \text{ chemin de } a \text{ vers } b \text{ dans l'automate } \mathcal{A}^{PAP} \right\}$$

Si l'on dénote par L_i le language de l'automate $\mathcal{A}^{PAP}$ avec état initial a et état final i, on a les relations

$$L_a = \{\epsilon\} \cup L_a 0 \cup L_a 1 \cup L_b 0$$

$$L_b = L_a 2.$$

On en déduit

$$\pi(D_{u,a}) = \{0\} \cup \gamma\pi(D_{u,a}) \cup \gamma\pi(D_{u,a}) + 1 \cup \gamma\pi(D_{u,b})$$

$$\pi(D_{u,b}) = \gamma\pi(D_{u,a}) + 2.$$

Puis, en passant à l'adhérence

$$R_a = \gamma R_a \cup (\gamma R_a + 1) \cup \gamma R_b$$

$$R_b = \gamma R_a + 2$$

(Il n'est plus nécessaire de garder le $\{0\}$, puisque l'inclusion $\gamma R_a \subseteq R_a$ avec $|\gamma| < 1$ et le fait que R_a est fermé non vide font que $0 \in R_a$.)

8. Les interieurs de R_a et R_b sont-ils disjoints ?
   Les intérieurs de R_a et R_b sont disjoints, puisque R_a et R_b sont disjoints en mesure. En effet, la substitution s vérifie la strong coincidence puisque que $s(a)$ et $s(b)$ ont la lettre a comme préfixe commun. (Ou sinon, on peut utiliser la disjonction en mesure de l'équation gIFS et obtenir que l'union $\gamma R_a \cup \gamma R_b$ est disjointe en mesure.)
9. Décrire $\pi(D_u)$ à l'aide d'un language rationnel sur l'alphabet $\{0, 1, 2\}$.
   D'après ce que l'on a fait à la question 7, on a

$$\pi(D_u) = \left\{ \sum_{i=0}^{n} t_i \gamma^{n-i} \;\middle|\; n \in \mathbb{N},\ t_0 t_1 ... t_n \in L \right\},$$

où L est le langage reconnu par l'automate $\mathcal{A}^{PAP}$ avec état initial a et état finaux $\{a, b\}$.

10. En utilisant la question précédente, montrer que que l'on a l'inclusion

$$R_a \cup R_b \subseteq [-1, \sqrt{2}+1].$$

Comme γ est négatif, pour tous $t_i \in \{0,1,2\}$, on a l'encadrement

$$\sum_{i=0}^{\infty} 2\gamma^{2i+1} \leq \sum_{i=0}^{n} t_i \gamma^{n-i} \leq \sum_{i=0}^{\infty} 2\gamma^{2i},$$

ce qui donne

$$-1 \leq \sum_{i=0}^{n} t_i \gamma^{n-i} \leq 1+\sqrt{2}.$$

En passant à l'adhérence, on a donc bien l'inclusion souhaitée.

11. En déduire que le sous-shift engendré par le mot u est mesurablement conjugué à une translation du tore $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$, ainsi qu'à un échange d'intervalles que l'on explicitera.

Pour pouvoir appliquer le critère du cours, il manque seulement la disjonction en mesure de l'union

$$\bigcup_{t\in\pi(\Gamma_0)} R+t = \mathbb{R},$$

où $R = R_a \cup R_b$ est la fractale de Rauzy.

On a $\Gamma_0 =< e_a - e_b >=< \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix} >$, donc $\pi(\Gamma_0) =< 2+\sqrt{2} >= (2+\sqrt{2})\mathbb{Z}$. Or, la longueur de l'intervalle $[-1, 1+\sqrt{2}]$ qui contient R est $2+\sqrt{2}$. Pour $t \in (2+\sqrt{2})\mathbb{Z}\backslash\{0\}$, les intervalles $[-1,\sqrt{2}]$ et $[-1, 1+\sqrt{2}]+t$ sont disjoints en mesure (ils s'intersectent au plus en un seul point), donc R et $R+t$ sont disjoints en mesures (ils s'intersectent aussi au plus en un seul point). L'union $\bigcup_{t\in\pi(\Gamma_0)} R+t = \mathbb{R}$ et le fait que R soit fermé implique donc que $R = [-1, 1+\sqrt{2}]$.

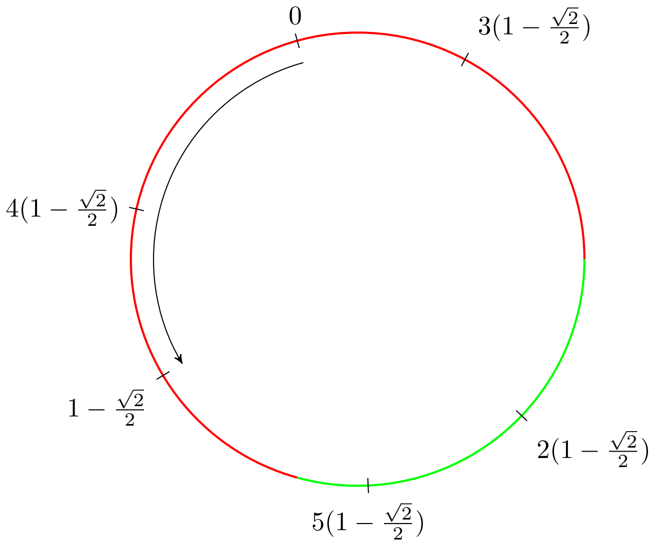
On a bien la disjonction en mesure souhaitée. On peut donc appliquer le critère du cours, et on obtient que le sous-shift engendré par le mot u (qui est par ailleurs uniquement ergodique car s est primitive) est mesurablement conjugué à l'échange de morceaux (R, E, λ), où E est définit presque partout par

$$E : x \to \begin{cases} x+\pi(e_a) & \text{si } x \in R_a \\ x+\pi(e_b) & \text{si } x \in R_b \end{cases}$$

Et le sous-shift $(\overline{S^{\mathbb{N}}u, S}$ est aussi mesurablement conjugué à la translation du tore $(\mathbb{R}/\pi(\Gamma_0), +\pi(e_a), \lambda) = (R/(2+\sqrt{2})\mathbb{Z}, +1, \lambda)$. En renormalisant, cette translation du tore est conjugué à la translation du tore $(\mathbb{R}/\mathbb{Z}, +\frac{1}{2+\sqrt{2}}, \lambda) = (\mathbb{R}/\mathbb{Z}, +1-\frac{\sqrt{2}}{2}, \lambda)$.

On peut expliciter davantage l'échange de morceaux en remarquant que $x \in R_a \implies x+\pi(e_a) \in R = [-1, 1+\sqrt{2}]$. Donc $x \in R_a \implies x \in [-1, 1+\sqrt{2}] \cap [-2, \sqrt{2}] = [-1, \sqrt{2}]$. De la même façon, on a $R_b + \pi(e_b) \subseteq R \subseteq [-1, 1+\sqrt{2}]$, donc $R_b \subseteq [-1, 1+\sqrt{2}]+1+\sqrt{2} = [\sqrt{2}, 2+2\sqrt{2}]$, donc $R_b \subseteq [\sqrt{2}, 1+\sqrt{2}]$. Or, on a d'autre part $R_a \cup R_b = R = [-1, 1+\sqrt{2}]$, donc $R_a = [-1, \sqrt{2}]$ et $R_b = [\sqrt{2}, 1+\sqrt{2}]$. Ainsi, E est simplement l'échange des deux intervalles $[-1, \sqrt{2}]$ et $[\sqrt{2}, 1+\sqrt{2}]$.

Figure 5 – La rotation de $1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$ sur $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$
et l'orbite de 0 donnant le mot u



12. En déduire que u est un mot sturmien. Quel est son angle ?
    La conjugaison mesurée que l'on a obtenue entre le sous-shift $(\overline{S^{\mathbb{N}}u}, S)$ et l'échange de deux intervalles (R, E, λ) restreint à $S^{\mathbb{N}}u$ est une vraie conjugaison avec l'échange d'intervalles restreint à $\pi(D_u)$. En effet, dans la preuve du critère, on obtient la conjugaison mesuré en prolongeant par continuité cette application de $S^{\mathbb{N}}u$ vers $\pi(D_u)$. Et on a vu aussi dans cette preuve que l'application réciproque (qui est définie presque partout) est le codage de l'échange de domaine. Ainsi, le mot u s'obtient exactement comme l'orbite de 0 par cet échange de deux intervalles (on lit une lettre a quand on tombe dans R_a, et on lit une lettre b quand on tombe dans R_b). Cela se voit aussi sur la rotation du cercle : voir figure 5.
    Ceci est une des nombreuses caractérisations des mots sturmiens. Ainsi le mot u est sturmien, d'angle $1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$.
13. Démontrer que l'on a
    $$D_u = \left\{x \in \mathbb{N}^2 \;\middle|\; \pi(x) \in]-1, \sqrt{2}+1[\right\}.$$
    Soit $Q = \left\{x \in \mathbb{N}^2 \;\middle|\; \pi(x) \in]-1, \sqrt{2}+1[\right\} = \pi^{-1}(]-1, 1+\sqrt{2}[) \cap \mathbb{N}^2$. On a déjà l'inclusion $D_u \subseteq Q$, puisque $\pi(D_u) \subseteq [-1, 1+\sqrt{2}]$ et $D_u \subseteq \mathbb{N}^2$, et puisque ni -1 ni $\sqrt{2}+1$ ne sont dans $\pi(D_u)$ étant donné que $\pi^{-1}(-1) \cap \mathbb{Z}^2 = (-1, 0) \notin \mathbb{N}^2$ et $\pi^{-1}(1+\sqrt{2}) \cap \mathbb{Z}^2 = (0, -1) \notin \mathbb{N}^2$.
    Pour l'autre inclusion, on utilise le fait que D_u soit un domaine fondamental pour l'action du groupe $\Gamma_0 =< (1, -1) >$ sur $\mathbb{N}^2 + \Gamma_0$. (Pour avoir un domaine fondamental de tout $\mathbb{Z}^2$, il aurait fallu compléter u en un mot bi-infini.) Soit $x \in Q$. Alors x est dans un des translatés du domaine fondamental D_u. Soit $t \in \Gamma_0$ tel que $x \in t + D_u$. On a alors $\pi(x) \in \pi(t) +]-1, 1+\sqrt{2}[$, mais d'autre part $\pi(x) \in]-1, 1+\sqrt{2}[$ par

définition de Q. Or, les intervalles $\pi(t)+]-1,1+\sqrt{2}[$ et $]-1,1+\sqrt{2}[$ sont disjoints si $t \in \Gamma_0 \backslash \{0\}$, puisque $\pi(\Gamma_0) = (2+\sqrt{2})\mathbb{Z}$, avec $2+\sqrt{2}$ la longueur de l'intervalle $]-1,1+\sqrt{2}[$. Ainsi, $t=0$, et on a bien $x \in D_u$.