Année universitaire 2017-2018

Site : ☐Luminy ☒St-Charles ☐St-Jérôme ☐Cht-Gombert ☐Aix-Montperrin ☐Aubagne-Satis

Sujet session : ☐1er semestre - ☒2ème semestre - ☐Session 2 Durée de l'épreuve : 3h

Examen de : ☐L1 / ☐L2 / ☐L3 - ☐M1 / ☒M2 - ☐LP - ☐DU Nom diplôme : M2

Code Apogée du module : SEE000-103 / SMA5A0-103

Libellé du module : Substitutions et fractales de Rauzy

Document autorisé : ☒OUI - ☐NON Calculatrices autorisées : ☒OUI - ☐NON

Les exercices sont indépendants et peuvent être traités dans le désordre. Vous pouvez sauter des questions sans les démontrer, mais admettre le résultat pour l'utiliser par la suite.

Examen du 27 avril 2018

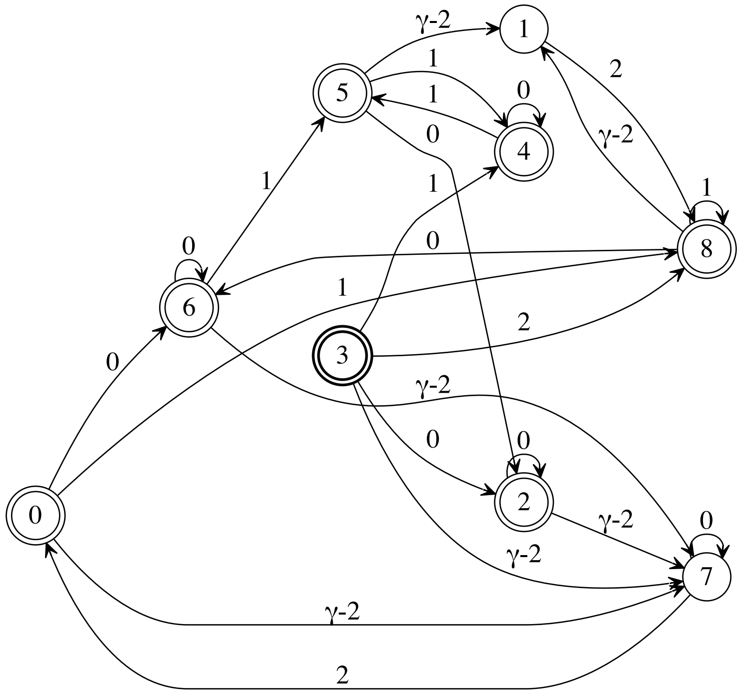
Exercice 1

On considère la substitution suivante, sur l'alphabet $A = \{1, 2\}$.

$$s : \begin{array}{l} 1 \mapsto 112 \\ 2 \mapsto 21 \end{array}$$

1. Calculer la matrice d'incidence M de la substitution s.
2. La substitution s est-elle irréductible ? Est-elle primitive ?
3. La substitution s est-elle de type Pisot ? Est-elle unimodulaire ?
4. Combien y-a-t'il de points fixes infinis à droite ? Combien y-a-t'il de points périodiques bi-infinis ?
5. On considère le mot infini $u \in A^{\mathbb{N}}$ qui est le point fixe de s commençant par la lettre 1. Dessiner le début de la ligne discrète
$$D_u = \left\{ \mathrm{Ab}(v) \;\middle|\; v \text{ préfixe fini de } u \right\}.$$
6. Soit $\pi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une application linéaire telle que $\pi(e_1) = 1$ et $\pi(D_u)$ est borné, et soit (e_1, e_2) la base canonique de $\mathbb{R}^2$. Montrer que π existe et est unique. Que vaut $\pi(e_2)$?
7. Vérifier qu'il existe un réel γ tel que l'on ait $\pi(MX) = \gamma\pi(X)$ pour tout $X \in \mathbb{R}^2$, et calculer ce réel.
8. Décrire l'ensemble $\pi(D_u)$ à l'aide d'un automate ayant pour alphabet $\{0, 1, 2, \gamma - 2\}$.
9. On pose $R = \overline{\pi(D_u)}$, et pour tout $i \in \{1, 2\}$, $R_i = \overline{\pi(D_{u,i})}$. Ecrire le système d'équations gIFS que vérifient R_1 et R_2.
10. Les interieurs de R_1 et de R_2, sont-ils disjoints ?
11. Expliciter ce qu'est le groupe $\Gamma_0 =< e_i - e_j >_{i,j \in A}$, ainsi que le groupe $\pi(\Gamma_0)$.
12. Montrer que l'on a l'inclusion
$$R \subseteq \left[-\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \sqrt{5}+1 \right]$$
13. L'union $\bigcup_{t \in \pi(\Gamma_0)} R + t = \mathbb{R}$ est-elle disjointe en mesure de Lebesgue ?
14. Montrer que le sous-shift engendré par le mot u est mesurablement conjugué à une translation du cercle $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ que l'on explicitera.
15. Le mot u est-il sturmien ?
16. Démontrer que R n'est pas connexe.

FIGURE 1 – Automate $\mathcal{A}_b$



On admet que le bord ∂R de R vérifie

$$\partial R = \left\{ \sum_{k=0}^{+\infty} a_i \gamma^i \;\middle|\; n \in \mathbb{N},\ 3 \xrightarrow{a_0} q_1 \xrightarrow{a_1} \dots \xrightarrow{a_n} \dots \in \mathcal{A}_b \right\},$$

où $\mathcal{A}_b$ est l'automate de la figure 1, et $2 \xrightarrow{a_0} q_1 \xrightarrow{a_1} \dots \xrightarrow{a_n} \dots \in \mathcal{A}_b$ signifie qu'il y a un chemin infini partant de l'état 2 et étiqueté par $(a_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \{0, 1, 2, \gamma - 2\}^{\mathbb{N}}$ dans l'automate $\mathcal{A}_b$.

17. Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\gamma^n(3\gamma - 2) \in \partial R$.
18. Ecrire la matrice N associée au graphe de l'automate $\mathcal{A}_b$ de la figure 1.
19. On admet que le polynôme caractéristique de N vaut

$$\chi_N(x) = x^2 \cdot (x+1) \cdot (x-1)^4 \cdot (x^2 - 2x - 1).$$

Calculer le rayon spectral de N. En déduire la dimension de Minkowski-Bouligand du bord ∂R.

Exercice 2

On considère la substitution suivante, sur l'alphabet $A = \{a, b, c, d\}$

$$s : \begin{cases} a \mapsto ab \\ b \mapsto cd \\ c \mapsto bcd \\ d \mapsto cc \end{cases}$$

1. Calculer la matrice d'incidence M de la substitution s, et vérifier que 1 est une valeur propre de cette matrice.
2. La substitution s est-elle irréductible ? Est-elle primitive ?

On admet que la plus grande valeur propre de M en valeur absolue est un nombre $\beta > 2$ dont le polynôme minimal est $p_\beta(x) = x^3 - x^2 - 3x - 2$. Et on admet que le polynôme p_β n'a pas de racine réelle autre que β.

3. La substitution s est-elle Pisot ? Est-elle unimodulaire ?
4. Combien y-a-t'il de points fixes infinis à droite ?
5. On considère le mot infini $u \in A^{\mathbb{N}}$ qui est le point fixe de s commençant par la lettre a. Calculer les 20 premières lettres de u.
6. Donner un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel E muni d'une métrique pour laquelle il est localement compact, et une application linéaire $\pi : \mathbb{Q}^4 \to E$ tels que
   — $R = \overline{\pi(D_u)}$ est borné,
   — les ensembles $R_i = \overline{\pi(D_{u,i})}$ satisfont une équation gIFS avec disjonction en mesure de Haar.

   On donnera explicitement l'équation gIFS.
7. La substitution s satisfait-elle la strong coincidence ?
8. La substitution s restreinte aux lettres $\{b, c, d\}$ satisfait-elle la strong coincidence ?