Devoir maison

1 Les séries de Bertrand

On appelle séries de Bertrand les séries de la forme

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}(\ln(n))^{\beta}} \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

1. Démontrer que la série converge pour $\alpha > 1$ et diverge pour $\alpha < 1$ quel que soit $\beta \in \mathbb{R}$.
   (On pourra utiliser les croissances comparées : $(\ln n)^{\beta} = o(n^{\epsilon})$ pour tous réels $\epsilon > 0$ et $\beta > 0$.)

   Dans la suite, on s'intéresse au cas où $\alpha = 1$.
2. Montrer que si $\alpha = 1$ et $\beta \leq 0$, alors la série diverge.
3. Démontrer que pour tout $\beta \geq 0$ et tout $N \geq 2$, on a l'encadrement suivant

$$\int_2^{N+1} \frac{dx}{x(\ln x)^{\beta}} \quad \leq \quad \sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n(\ln n)^{\beta}} \quad \leq \quad \frac{1}{2(\ln 2)^{\beta}} + \int_2^{N} \frac{dx}{x(\ln x)^{\beta}}$$

4. Pour tout $\beta \in \mathbb{R}$, calculer une primitive de $\frac{1}{x(\ln x)^{\beta}}$.
5. Pour quelles valeurs de β la série $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln(n))^{\beta}}$ converge-t'elle ?
6. Trouver un équivalent des sommes partielles lorsque la série diverge, et un équivalent du reste lorsqu'elle diverge.
7. (facultatif) Est-ce que la série $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)(\ln(\ln n))}$ converge ?

2 La constante d'Euler

Nous allons montrer que la suite $u_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)$ converge vers un réel $\gamma > 0$ que l'on appelle constante d'Euler.

1. Posons $f(x) = \frac{1}{x+1} - \ln(x+1) + \ln(x)$ pour tout $x \in [1, +\infty[$.
   Montrer que la fonction f est croissante sur $[1, +\infty[$, et calculer sa limite en $+\infty$.
2. Démontrer que la suite u_n est décroissante.
3. En comparant les sommes $\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k}$ à des intégrales, montrer que l'on a l'encadrement

$$1 - \ln(2) + \ln(n+1) \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leq 1 + \ln(n).$$

4. Démontrer l'existence de la constante d'Euler, et en donner un encadrement.
5. (facultatif) La constante d'Euler est-elle un nombre rationnel ?