Corrigé du devoir maison n°2 d'analyse 2

Soit f la fonction définie par

$$f(x) = \sum_{n\geq 1} \frac{\sin(nx)}{n2^n}$$

pour $x \in \mathbb{R}$.

1. **Quel est le domaine de définition de la fonction f ?**
   Les fonctions $x \mapsto \frac{\sin(nx)}{n2^n}$ sont définies sur $\mathbb{R}$, et on a la majoration

   $$\left|\frac{\sin(nx)}{n2^n}\right| \leq \frac{1}{2^n} \quad \text{pour tous } n \geq 1 \text{ et } x \in \mathbb{R}.$$

   Or, la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n}$ est une série géométrique convergente, donc la série définissant $f(x)$ converge normalement sur $\mathbb{R}$, donc uniformément, donc simplement. Donc $f(x)$ est définie pour tout réel x. $\boxed{D_f = \mathbb{R}}$

2. **Montrer que la fonction f est 2π-périodique.**
   Pour tout $x \in R$, on a $f(x + 2\pi) = \displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{\sin(n(x + 2\pi))}{n2^n} = \sum_{n\geq 1} \frac{\sin(nx)}{n2^n} = f(x)$, puisque sin est 2π-périodique. D'où la 2π-périodicité de f.

3. **Montrer que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que sa dérivée f' vérifie $f'(x) = \displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{\cos(nx)}{2^n}$ pour tout réel x.**
   Le terme général de la série définissant $f(x)$ est dérivable, et sa dérivée est $\frac{\cos(nx)}{2^n}$. Or, on a l'inégalité

   $$\left|\frac{\cos(nx)}{2^n}\right| \leq \frac{1}{2^n} \quad \text{pour tous } n \geq 1 \text{ et } x \in \mathbb{R},$$

   avec $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n}$ qui est une série géométrique convergente. Donc la série des dérivées converge normalement et donc uniformément sur $\mathbb{R}$. Le théorème de dérivation termes à termes s'applique donc, et donne la dérivabilité de f ainsi que l'égalité souhaitée.

4. **Montrer que l'on a $f'(x) = \dfrac{2\cos(x) - 1}{5 - 4\cos(x)}$ pour tout réel x.**
   Remarquons que l'on a $\cos(nx) = Re(e^{inx})$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \geq 1$. On peut donc écrire :

   $$f'(x) = \sum_{n\geq 1} \frac{\cos(nx)}{2^n} = \sum_{n\geq 1} \frac{Re(e^{inx})}{2^n} = Re\left(\sum_{n\geq 1} \frac{e^{inx}}{2^n}\right) = Re\left(\sum_{n\geq 1} \left(\frac{e^{ix}}{2}\right)^n\right).$$

   Or, la somme de cette série géométrie vaut

   $$\sum_{n\geq 1} \left(\frac{e^{ix}}{2}\right)^n = \frac{e^{ix}/2}{1 - e^{ix}/2} = \frac{e^{ix}}{2 - e^{ix}}.$$

   Donc on a

   $$f'(x) = Re\left(\frac{e^{ix}}{2 - e^{ix}}\right) = \frac{Re\left(e^{ix}(2 - e^{-ix})\right)}{|2 - e^{ix}|^2} = \frac{Re\left(2e^{ix} - 1\right)}{(2 - \cos(x))^2 + \sin^2(x)} = \frac{2\cos(x) - 1}{4 - 4\cos(x) + \cos^2(x) + \sin^2(x)}.$$

   On trouve donc bien l'expression escomptée.

5. **On veut en déduire une expression de $f(x)$ à l'aide de fonctions usuelles.**
   (a) **Donner une expression de $f(x)$ comme intégrale d'une fonction de la variable u.**

On a

$$f(x) = \int_0^x f'(u)du = \int_0^x \frac{2\cos(u) - 1}{5 - 4\cos(u)}du$$

puisque $f(x)$ est la primitive de $f'(x)$ qui s'annule en $x = 0$. En effet, pour $x = 0$, on a

$$f(0) = \sum_{n\geq 1} \frac{\sin(n0)}{n2^n} = \sum_{n\geq 1} 0 = 0.$$

(b) **Effectuer le changement de variable $t = \tan(u/2)$.**

Vérifier que l'on obtient $f(x) = \displaystyle\int_0^{\tan(x/2)} \frac{2(1-3t^2)}{(9t^2+1)(t^2+1)}dt$

En posant $t = \tan(u/2)$, on a $\cos(u) = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ et $dt = \frac{1+t^2}{2}du$, ce qui donne :

$$f(x) = \int_0^{\tan(x/2)} \frac{2\frac{1-t^2}{1+t^2} - 1}{5 - 4\frac{1-t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{2dt}{1+t^2} = \int_0^{\tan(x/2)} \frac{2(1-t^2) - (1+t^2)}{5(1+t^2) - 4(1-t^2)} \cdot \frac{2dt}{1+t^2} = \int_0^{\tan(x/2)} \frac{1-3t^2}{1+9t^2} \cdot \frac{2dt}{1+t^2}$$

qui est bien le résultat attendu. Et ce changement de variable est valable pour tout $x \in [-\pi, \pi]$, puique $u \mapsto \tan(u/2)$ est de classe C^1 sur $]-\pi, \pi[$ (c'est un changement de variable d'intégrales impropres quand $x = \pm\pi$). Comme de plus, la fonction $u \mapsto \tan(u/2)$ est π-périodique, ce changement de variable est finalement valable pour tout réel x.

(c) **Calculer cette intégrale.**

C'est l'intégrale d'une fraction rationnelle. On la décompose en éléments simples :

$$F(t) := \frac{2(1-3t^2)}{(9t^2+1)(t^2+1)} = \frac{\alpha + \beta t}{9t^2+1} + \frac{\gamma + \delta t}{t^2+1}$$

Il n'y a pas de terme polynomial ici, puisque le degré du numérateur est strictement inférieur à celui du dénominateur. On a ensuite

$$\alpha + \beta i/3 = (9t^2+1)F(t)\rfloor_{t=i/3} = \frac{2(1-(-1)/3)}{(-1)/9+1} = 24/8 = 3,$$

qui nous donne $\alpha = 3$ et $\beta = 0$ (en identifiant parties réelles et imaginaires), et de même

$$\gamma + \delta i = (t^2+1)F(t)\rfloor_{t=i} = \frac{2(1-3(-1))}{9(-1)+1} = 8/(-8) = -1,$$

qui nous donne $\gamma = -1$ et $\delta = 0$. Il suffit maintenant d'intégrer chaque élément simple. On a les primitives

$$\int \frac{dt}{1+t^2} = \arctan(t) \quad \text{et} \quad \int \frac{3dt}{1+(3t)^2} = \arctan(3t),$$

donc

$$f(x) = [\arctan(3t)]_0^{\tan(x/2)} - [\arctan(t)]_0^{\tan(x/2)} = \arctan(3\tan(x/2)) - \arctan(\tan(x/2)),$$

puisque $\arctan(0) = 0$.

(d) **On a obtenu une expression de $f(x)$ à l'aide de fonctions usuelles. Cette expression est-elle bien définie sur $\mathbb{R}$? Expliquer.**

L'expression $\arctan(3\tan(x/2)) - \arctan(\tan(x/2))$ n'est pas définie en $x = \pi$ modulo 2π, puisque $u \mapsto \tan(u/2)$ n'est pas définie en ces valeurs. Mais sa limite en ces valeurs est bien définie :

$$\lim_{x\to\pi} \arctan(3\tan(x/2)) - \arctan(\tan(x/2)) = \lim_{u\to\infty} \arctan(3u) - \arctan(u) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = 0.$$

Et c'est normal, puisque le changement de variable $t = \tan(u/2)$ qui a été effectué pendant le calcul de l'intégral donne des intégrales impropres quand $x = \pi$ modulo 2π, mais est bien valable pour tout réel x. On a donc l'expression

$$f(x) = \begin{cases} \arctan(3\tan(x/2)) - \arctan(\tan(x/2)) & \text{si } x \neq \pi[2\pi] \\ 0 & \text{si } x = \pi[2\pi] \end{cases}$$

pour tout réel x.