Devoir surveillé n$^{\text{o}}$1 d'analyse 2

Durée 2h

Les calculatrices et documents sont interdits.
La qualité de la rédaction et de la présentation, la clarté et la précision des raisonnements constitueront un élément important pour l'appréciation des copies.

1 Quelques séries

Déterminer, en justifiant bien chaque réponse, la nature de chacune des séries suivantes.

1. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^n}{n!}$
2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n \sin\left(\frac{(-1)^n}{n^3}\right)$
3. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{\ln(n)}$
4. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+2(-1)^n}$

2 Théorème de Raab

Le but de cet exercice est de démontrer le théorème suivant.

Théorème 1 (Critère de Raab)**.**
Soit $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *une série à termes strictement positifs. Si la limite*

$$l_a := \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right)$$

existe, alors
- *pour* $l_a > 1$*, la série converge,*
- *pour* $l_a < 1$*, la série diverge,*
- *pour* $l_a = 1$*, on ne peut rien dire.*

Pour cela, nous allons commencer par démontrer le théorème suivant :

Théorème 2 (Théorème de comparaison logarithmique)**.**
Si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *sont deux suites de réels strictement positifs telles que*

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n},$$

alors la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ *entraîne celle de la série* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$.

1. Démontrer que sous les hypothèses du théorème 2, on a les inégalités
$$\forall n \geq n_0, \quad \frac{a_n}{a_{n_0}} \leq \frac{b_n}{b_{n_0}}$$
2. Démontrer le théorème 2.
3. Pour la suite $a_n = \frac{1}{n^\alpha}$ (pour $n \geq 1$ et pour un réel α), que vaut la limite l_a du théorème 1 ?
4. Montrer que si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux suites telles que les limites l_a et l_b du théorème 1 existent et telles que $l_a > l_b$, alors les hypothèses du théorème 2 sont satisfaites.
5. Déduire des deux questions précédentes une preuve du théorème 1 dans le cas où $l_a > 1$.
6. Démontrer de même le cas $l_a < 1$.
7. Trouver une série divergente pour laquelle la limite du théorème 1 est 1.

TSVP →

8. Montrer que pour la série convergente
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^2}$$
la limite dans le théorème 1 vaut 1.
9. Que permet de dire le théorème de Raab sur les séries de Bertrand
$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}(\ln n)^{\beta}},$$
où α et β sont des réels ?

3 Une série oscillante

Quelle est la nature de la série $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin^3(n)\ln(n)}{n}$?

Formulaire

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + O_{x\to 0}(x^5) \tag{1}$$
$$\sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \tag{2}$$
$$(1+x)^{\alpha} = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + O_{x\to 0}(x^3) \tag{3}$$
$$\ln(n+1) = \ln(n) + O_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\right) \tag{4}$$
$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 \tag{5}$$
$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + O_{x\to 0}(x^3) \tag{6}$$