Devoir surveillé n°2 d'analyse 2

Durée 2h

Les calculatrices et documents sont interdits.
La qualité de la rédaction et de la présentation, la clarté et la précision des raisonnements constitueront un élément important pour l'appréciation des copies.

Exercice 1

Etudier la nature des intégrales suivantes.

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{t}{t^3+1} dt \qquad J = \int_{-\infty}^{+\infty} t \ln\left(\frac{t^4+1}{t^4}\right) dt$$

Exercice 2

On considère la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie sur $]0, +\infty[$ par

$$f_n(x) = nxe^{-nx}.$$

1. Etudier la convergence simple de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $]0, +\infty[$.
   Notons f la fonction limite simple de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $]0, +\infty[$.
2. Rappeler la définition de la convergence uniforme de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers f sur une partie $I \subset \mathbb{R}$.
3. Montrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur tout intervalle de la forme $[a, +\infty[$ pour $a > 0$.
4. La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle uniformément vers f sur $]0, +\infty[$?

Exercice 3

Le but de cet exercice est de montrer le résultat suivant :
Soit $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ une série à termes strictement positifs convergente, et soit $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k$ son reste. Alors la série

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{R_n}$$

est divergente.

1. Donner une expression de a_n en fonction des restes R_n et R_{n-1} pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.
2. Démontrer l'inégalité $x - 1 \geq \ln(x)$ pour tout réel $x \geq 0$.
3. En déduire l'inégalité
   $$\frac{a_n}{R_n} \geq \ln(R_{n-1}) - \ln(R_n)$$
   pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.
4. Que peut-on dire de la série de terme général $\ln(R_{n-1}) - \ln(R_n)$?
5. Conclure.

Question bonus (facultative)

Calculer les intégrales I et J de l'exercice 1.