Corrigé du devoir surveillé n^{o}2 d'analyse 2

Exercice 1

Etudier la nature des intégrales suivantes.

$$I=\int_0^{+\infty}\frac{t}{t^3+1}dt \qquad J=\int_{-\infty}^{+\infty}t\ln\left(\frac{t^4+1}{t^4}\right)dt$$

—

La fonction $t\mapsto\frac{t}{t^3+1}$ est définie et continue sur l'intervalle $[0,+\infty[$. Il suffit donc d'étudier la convergence en l'infini. En l'infini, on a l'équivalent

$$\frac{t}{t^3+1}\underset{t\to\infty}{\sim}\frac{1}{t^2}.$$

Or, l'intégrale $\int_1^\infty\frac{1}{t^2}dt$ est une intégrale de Riemann convergente. Par théorème de comparaison des fonctions positives, on a donc la convergence de l'intégrale I.

La fonction $t\mapsto t\ln\left(\frac{t^4+1}{t^4}\right)$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$. En l'infini, on a l'équivalent

$$t\ln\left(\frac{t^4+1}{t^4}\right)=t\ln\left(1+\frac{1}{t^4}\right)\underset{t\to\infty}{\sim}t\frac{1}{t^4}=\frac{1}{t^3}$$

Or, l'intégrale $\int_1^\infty\frac{1}{t^3}dt$ est une intégrale de Riemann convergente. Par comparaison des fonctions positives, on a donc la convergence de l'intégrale $\int_0^\infty t\ln\left(\frac{t^4}{t^4+1}\right)dt$. En moins l'infini, on a le même équivalent :

$$t\ln\left(\frac{t^4+1}{t^4}\right)\underset{t\to-\infty}{\sim}\frac{1}{t^3}$$

Et sur l'intervalle $]-\infty,0]$ les fonctions $t\mapsto\frac{-1}{t^3}$ et $t\mapsto -t\ln\left(\frac{t^4}{t^4+1}\right)$ sont positives, et l'intégrale $\int_{-\infty}^{-1}\frac{-1}{t^3}dt=\int_1^\infty\frac{1}{t^3}dt$ (par changement de variable $t\mapsto -t$) est une intégrale de Riemann convergente. Par théorème de comparaison, l'intégrale $\int_{-\infty}^0 -t\ln\left(\frac{t^4}{t^4+1}\right)dt$ converge donc. Finalement l'intégrale

$$J=\int_{-\infty}^{\infty}t\ln\left(\frac{t^4}{t^4+1}\right)dt=\int_0^\infty t\ln\left(\frac{t^4}{t^4+1}\right)dt-\int_{-\infty}^0 -t\ln\left(\frac{t^4}{t^4+1}\right)dt$$

converge.

Exercice 2

On considère la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie sur $]0,+\infty[$ par

$$f_n(x)=nxe^{-nx}.$$

1. **Etudier la convergence simple de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $]0,+\infty[$.**
   Pour $x>0$ fixé, on a
   $$\lim_{n\to\infty}nxe^{-nx}=0$$
   par croissances comparées. Donc la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction nulle sur $]0,+\infty[$.

TSVP →

2. **Rappeler la définition de la convergence uniforme de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers f sur une partie $I \subset \mathbb{R}$.**

$$\sup_{x\in I} |f_n(x) - f(x)| \longrightarrow_{n\to\infty} 0$$

3. **Montrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur tout intervalle de la forme $[a, +\infty[$ pour $a > 0$.**
   Etudions les variations des fonctions f_n pour calculer la borne supérieure $\sup_{x\in[a,+\infty[} |f_n(x) - 0|$. On a pour tout $x > 0$
   $$f_n'(x) = ne^{-nx} - n^2xe^{-nx} = n(1-nx)e^{-nx}.$$
   Donc
   $$f_n'(x) \geq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x \geq \frac{1}{n}.$$
   La fonction f_n est nulle en 0, tend vers 0 en $+\infty$ et est croissance sur $[0, \frac{1}{n}]$ puis décroissante sur $[\frac{1}{n}, +\infty]$. Pour n assez grand (a étant fixé), $\frac{1}{n}$ est inférieur à a, et donc f_n atteint son maximum en a. On a donc
   $$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[a,+\infty[} |f_n(x)| = \lim_{n\to\infty} f_n(a) = 0.$$
   Cette dernière limite étant nulle d'après la convergence simple de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en a. Ainsi, la convergence de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien uniforme sur $[a, +\infty[$.

4. **La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle uniformément vers f sur $]0, +\infty[$?**
   D'après ce que l'on a fait à la question précédente, la fonction f_n atteint son maximum sur $\mathbb{R}_+^*$ en $\frac{1}{n}$. Ce maximum vaut
   $$\sup_{x\in\mathbb{R}_+^*} |f_n(x)| = f_n\left(\frac{1}{n}\right) = e^{-1},$$
   qui ne tend pas vers 0. La convergence n'est donc pas uniforme sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 3

Le but de cet exercice est de montrer le résultat suivant :
Soit $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ une série à termes strictement positifs convergente, et soit $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k$ son reste. Alors la série

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{R_n}$$

est divergente.

1. **Donner une expression de a_n en fonction des restes R_n et R_{n-1} pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.**
   On a
   $$R_{n-1} = \sum_{k=n}^{+\infty} a_k = a_n + \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k = a_n + R_n$$
   donc $a_n = R_{n-1} - R_n$.

2. **Démontrer l'inégalité $x-1 \geq \ln(x)$ pour tout réel $x \geq 0$.**
   Etudions la fonction f définie par $f(x) = x - 1 - \ln(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$. La fonction est dérivable, et on a
   $$f'(x) = 1 - \frac{1}{x}$$
   Cette dérivée est positive si et seulement si $x \geq 1$. La fonction atteint donc son minimum en 1. Donc on a pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$
   $$f(x) \geq f(1) = 0.$$
   D'où l'inégalité
   $$x - 1 \geq \ln(x)$$
   pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$.
3. **En déduire l'inégalité**
   $$\frac{a_n}{R_n} \geq \ln(R_{n-1}) - \ln(R_n)$$
   pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.
   Daprès la question 1., on a
   $$\frac{a_n}{R_n} = \frac{R_{n-1} - R_n}{R_n} = \frac{R_{n-1}}{R_n} - 1.$$
   En utilisant alors la question 2. pour $x = \frac{R_{n-1}}{R_n} > 0$ on obtient
   $$\frac{a_n}{R_n} \geq \ln(\frac{R_{n-1}}{R_n}) = \ln(R_{n-1}) - \ln(R_n).$$
4. **Que peut-on dire de la série de terme général $\ln(R_{n-1}) - \ln(R_n)$?**
   C'est une série téléscopique. Sa somme de 0 à l'infini est donc égale à
   $$\ln(R_{-1}) - \lim_{n\to\infty} \ln(R_n).$$
   Or, R_n est le reste d'une série convergente, donc $\lim_{n\to\infty} R_n = 0$. On a donc
   $$\lim_{n\to\infty} \ln(R_n) = -\infty.$$
   Donc la somme de la série vaut
   $$\sum_{n=0}^{\infty} \ln(R_{n-1}) - \ln(R_n) = +\infty.$$
5. **Conclure.**
   En sommant l'inégalité de la question 3., on a
   $$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{R_n} \geq \sum_{n\in\mathbb{N}} \ln(R_{n-1}) - \ln(R_n)$$
   Or, d'après ce que l'on a fait dans la question 4., on a
   $$\sum_{n\in\mathbb{N}} \ln(R_{n-1}) - \ln(R_n) = +\infty.$$
   D'où
   $$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{R_n} = +\infty.$$
   On a bien montré la divergence de la série de terme général $\frac{a_n}{R_n}$.

Question bonus (facultative)

Calculer les intégrales I et J de l'exercice 1.

Pour calculer l'intégrale I, on peut décomposer en éléments simples. Pour cela on factorise le dénominateur : $t^3+1=(t+1)(t^2-t+1)$. On obtient la décomposition

$$\frac{t}{t^3+1}=\frac{1}{3}\left[\frac{1+t}{1-t+t^2}-\frac{1}{1+t}\right].$$

On sait alors calculer l'intégrale

$$\int_0^x \frac{1}{1+t}dt=\ln(1+x).$$

Pour calculer l'intégrale de la fonction $\frac{1+t}{1-t+t^2}$, on la coupe en deux parties :

$$\frac{1+t}{1-t+t^2}=\frac{t-\frac{1}{2}}{1-t+t^2}+\frac{\frac{3}{2}}{1-t+t^2}$$

afin de faire apparaître une fraction de la forme $\frac{u'}{u}$. On a

$$\int_0^x \frac{t-\frac{1}{2}}{1-t+t^2}dt=\frac{1}{2}\ln(1-x+x^2).$$

Quant au dernier morceau, on le réécrit pour faire apparaître une intégrale usuelle :

$$\int_0^x \frac{\frac{3}{2}}{1-t+t^2}dt=\int_0^x \frac{\frac{3}{2}}{(t-\frac{1}{2})^2+1-\frac{1}{4}}dt=\int_0^x \frac{2}{1+(\frac{2t-1}{\sqrt{3}})^2}dt$$

On effectue le changement de variable affine $u=(2t-1)/\sqrt{3}$. On a alors $du=\frac{2}{\sqrt{3}}dt$.

$$\int_0^x \frac{\frac{3}{2}}{1-t+t^2}dt=\int_{-\frac{1}{\sqrt{3}}}^{(2x-1)/\sqrt{3}} \frac{\sqrt{3}}{1+u^2}du=\sqrt{3}\left[\arctan\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)-\arctan\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right]$$

En remettant tout ensemble, on a :

$$\int_0^x \frac{t}{1+t^3}dt=\frac{\sqrt{3}}{3}\left[\arctan\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)-\arctan\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right]+\frac{1}{2}\ln(1-x+x^2)-\ln(1+x).$$

Si l'on passe maintenant à la limite quand x tend vers l'infini, on a

$$\lim_{x\to\infty}\arctan\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)=\frac{\pi}{2},$$

et

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{2}\ln(1-x+x^2)-\ln(1+x)=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1-x+x^2}{(1+x)^2}\right)=\frac{1}{2}\ln(1)=0.$$

De plus, on a

$$-\arctan\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\frac{\pi}{6}.$$

On obtient donc

$$\boxed{I=\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}.}$$

L'intégrale $\boxed{\text{J est nulle}}$ puisque l'on a vu qu'elle était convergente, et que c'est l'intégrale d'une fonction impaire sur un domaine symétrique en 0.