# Quand est-ce qu'une intégrale converge ?

Soit $f$ une fonction **continue** de $]a,b[$ dans $\mathbb{C}$. On s'intéresse à intégrale

$$\int_a^b f(x)dx$$

**a**. Est-ce que $f$ est définie et continue (ou prolongeable par continuité) sur l'intervalle fermé $[a,b]$ ?
Si oui : alors l'intégrale converge (ce n'est pas une intégrale généralisée), et on a la formule

$$\int_a^b f = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} f\left(a + \frac{(b-a)k}{n}\right)$$

Sinon : étudier chaque borne où la fonction n'est pas définie ou pas continue. On se ramène à étudier chaque borne séparément en écrivant si nécessaire :

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$$

pour un $c \in ]a,b[$.

Etude de la borne $b$ (faire la même chose en $a$ si nécessaire) :

**b**. Si $f$ n'est pas positive au voisinage de $b$, étudier la convergence absolue, c'est-à-dire la convergence de l'intégrale

$$\int_c^b |f(x)|\, dx.$$

S'il y a convergence absolue : alors l'intégrale $\int_c^b f(x)dx$ converge.
Sinon : essayer de se ramener à une intégrale qui converge absolument ou bien essayer de calculer une primitive. Pour cela utiliser éventuellement des intégrations par parties, des changements de variables, ou reconnaître des dérivées.
On suppose donc que l'on est ramené à l'intégrale d'une fonction positive.

**c**. Si $f$ est **positive**, on peut utiliser un théorème de comparaison.

— Si $f \leq g$, $f \sim_b g$, $f = o_b(g)$ ou $f = O_b(g)$ avec $\int_c^b g$ qui converge et $g$ **positive**, alors l'intégrale $\int_c^b f$ converge.

— Si $g \leq f$, $g \sim_b f$, $g = o_b(f)$ ou $g = O_b(f)$ avec $\int_c^b g$ qui diverge et $g$ **positive**, alors l'intégrale $\int_c^b f$ diverge.

Cela permet de se ramener à une intégrale d'une fonction $g$ plus simple.

**d**. Comparaison série-intégrale : Dans le cas où $b = +\infty$, et où $f$ est **positive** et **décroissante**, alors l'intégrale $\int_c^{+\infty} f$ est de même nature que la série de terme général $f(n)$.

**e**. A-t'on une intégrale usuelle ? Par exemple une intégrale de Riemann :

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}dx$$

converge ssi $\alpha < 1$ et

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}dx$$

converge ssi $\alpha > 1$.
Si l'on a une intégrale d'une fraction rationnelle : dans ce cas on sait la calculer quitte à décomposer en éléments simples (ne pas oublier le terme polynomial s'il y en a un !). On sait intégrer les éléments simples, puisque l'on se ramène à un logarithme ou bien une des intégrales suivantes quitte à faire un changement de variable affine :

$$\int \frac{dx}{x^2+1} = \arctan(x)$$
$$\int \frac{dx}{1-x^2} = argth(x)$$

Si l'on doit intégrer une fraction rationnelle trigonométrique (de la forme $\frac{P(\cos x, \sin x)}{Q(\cos x, \sin x)}$ pour deux polynômes $P$ et $Q$) : Dans ce cas trouver un changement de variable approprié : par exemple, $u = \cos x$ ou $u = \sin x$, sachant que le changement de variable $t = \tan(x/2)$ permet systématiquement de se ramener à l'intégrale d'une fraction rationnelle grâce aux formules :

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \qquad \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \qquad \tan x = \frac{2t}{1-t^2} \qquad dt = \frac{1+t^2}{2}dx$$