TD 3 : Séries Entières

Exercice 1 : Déterminer les rayons de convergence des séries entières $\sum_n a_n z^n$ dans les cas suivants. On justifiera le résultat.

1. a) $a_n = \ln n$. b) $a_n = \ln(2n+1)$. c) $a_n = n^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$ fixé.
2. $a_n = 4^{2n-5}$. Déterminer ensuite la somme $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$.
3. $a_n = 2^n$ si n pair et $a_n = 0$ si n impair. Déterminer $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$.
4. $a_n = \frac{n!}{n^{n+1}}$.
5. $a_n = \frac{(n!)^k}{(kn)!}$.
6. $a_n = \mathrm{ch}(n)$.
7. $a_n = \sin(1/n)$.
8. $a_n = \tan(1/n) - \sin(1/n)$.
9. $a_n = (-2n)^{n+2}$.
10. $a_n = \cos(2n\pi/3)$. Déterminer ensuite la somme $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$.
11. $a_n = 3^n/n!$. Déterminer ensuite la somme $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$.
12. $a_{2k} = (-2)^k$ et $a_{2k+1} = 3^k$, $\forall k \in \mathbb{N}$. Déterminer ensuite la somme $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$.

Exercice 2 : Le but de cet exercice est d'établir les propriétés de la fonction exponentielle en utilisant **uniquement** sa définition en terme de série :

$$e^z := \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

On pose aussi

$$\cos z = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}), \quad \sin z = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz}), \quad z \in \mathbb{C}.$$

1. Démontrer les formules
$$e^{z+z'} = e^z e^{z'}, \quad \frac{\mathrm{d}e^z}{\mathrm{d}z} = e^z, \quad \frac{\mathrm{d}\cos z}{\mathrm{d}z} = -\sin z, \quad \frac{\mathrm{d}\sin z}{\mathrm{d}z} = \cos z, \quad \cos^2 z + \sin^2 z = 1.$$
Pour la première égalité, on utilisera ce qui a été vu sur le produit de deux séries.
2. Pour $x \in \mathbb{R}$ vérifier que e^x, $\cos x$, et $\sin x$ sont réels et indéfiniment dérivables.
3. Montrer que exp réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $]0, +\infty[$. On pourra traiter les cas $x \geq 0$ et $x < 0$ séparément.
4. Pour tout réel x, vérifier que l'on a $e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$. En déduire l'égalité $|e^{ix}| = 1$ pour tout x réel. Exprimer ensuite $|e^z|$ en fonction de $\mathrm{Re}\, z$.

5. On suppose que $\cos x > 0$ pour tout $x \geq 0$. Montrer alors que $\sin x$ tend vers une limite $l \in]0, 1]$ quand x tend vers l'infini, et que $\sin x < l$ pour tout $x \geq 0$. En considérant $f(x) = \cos x + lx/2$ et $\lim_{x\to\infty} f(x)$, montrer une contradiction.

6. On pose $m = \inf\{x > 0, \cos x = 0\}$. Que vaut e^{2im}? e^{im}? Montrer que m est le plus petit réel strictement positif tel que $4im$ soit période de e^z.

7. On définit le nombre $\pi = 2m$. Résoudre les équations suivantes:

   (a) $e^z = 0$.   (b) $e^z = 1$.   (c) $\sin z = 2$.

Exercice 3 : Calculer les sommes des séries entières suivantes pour tous $z \in \mathbb{C}$ et $x \in \mathbb{R}$.

1. $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1+n}{n!} z^n$
2. $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1+n+n^2}{n!} z^n$
3. $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^4}{n!} z^n$
4. $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2}{(n^2-1)n!} z^n$
5. $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(2n)!}$
6. $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}\right) z^n$

Exercice 4 : Résoudre les équation différentielles

$$(E) \quad x^2 y''(x) + x(x+1)y'(x) - y(x) = 0,$$

$$(F) \quad x^2 y''(x) + 4xy'(x) + 2y(x) = e^x,$$

$$(G) \quad y''(x) - 2xy'(x) - y(x) = 0,$$

en cherchant une solution sous la forme d'une série entière.

Exercice 5 : Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n(z) = (1 + z/n)^n$ pour $z \in \mathbb{C}$. Montrer que $u_n(z)$ est développable en série entière et calculer ce développement (on utilisera la formule du binôme).

Exercice 6 : Soit $f(x) = (\cos x)\exp(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

1. Expliquer pourquoi f possède en $x = 0$ un D.S.E. (développement en série entière).
2. Montrer que f est solution d'une certaine équation différentielle linéaire homogène du 2^{eme} ordre à coefficients constants (E).
3. Déterminer les séries entières $S(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$ solutions de (E) par la relation entre a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, pour tout $n \geq 0$.
4. En utilisant la formule d'Euler pour $\cos x$, déterminer les coefficients f_n de la série entière $f(z) = \sum_{n\geq 0} f_n z^n$. Vérifier que f_n satisfait la relation de récurrence trouvée au 3).

Exercice 7 : Déterminer le développement en série entière de $\arcsin(x)$ et de $\cos(x+1)$.

Exercice 8 : Déterminer le développement de Taylor en $x = 0$ à un ordre quelconque de la fonction réelle $f(x) = \exp(-1/x^2)$ (que l'on prolongera par continuité en 0). La fonction f est-elle développable en série entière?