MA301 Analyse II

Séries de fonctions TD 4

Exercice 1.

Déterminer la convergence simple et la convergence uniforme des séries de fonctions définies par les termes généraux

1. $u_n(x) = x^n(1 - x^n)$, $x \in [0, 1]$,
2. $v_n(x) = \dfrac{x}{n(1 + nx^2)}$, $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 2.

Etudier les domaines de convergence simple et de convergence uniforme des séries de fonctions définies par les termes généraux

1. $u_n(x) = \dfrac{\sin(2^n \pi x)}{2^n}$,
2. $v_n(x) = e^{-n^2 x}$,
3. $w_n(x) = \dfrac{1}{n^2 + x^2}$,
4. $t_n(x) = \dfrac{e^{-n^2 x^2}}{n^2}$,
5. $s_n(x) = \dfrac{1}{2^{n-1}\sqrt{1 + nx}}$,
6. $z_n(x) = \dfrac{\cos(nx)}{e^{nx}}$.

Exercice 3.

Soit la série de fonctions, de terme général $f_n(x) = \dfrac{\sin(nx)}{n^p}$.

(a) Montrer que si $p > 1$, *elle converge uniformément sur* $\mathbb{R}$.

(b) Montrer que la convergence est uniforme pour $0 < p \leq 1$ *dans tout intervalle* $[\alpha, \beta]$ *où* $2k\pi < \alpha < \beta < 2(k + 1)\pi$.

Exercice 4.

Soit (f_n) *la suite de fonctions définies sur* $[0, +\infty[$ *par* $f_n(x) = \dfrac{x}{x^2 + n^2}$.

(a) Soit $M > 0$. *Montrer que la série converge normalement sur* $[0, M]$.

(b) En déduire que la fonction somme $f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$ *est continue sur* $[0, +\infty[$.

(c) Etudier la convergence de la série $\sum_{n \geq 1} (-1)^n f_n$ *sur* $[0, +\infty[$.

Exercice 5.

Montrer que la série de fonctions définie par son terme général $f_n(x) = \dfrac{1}{n^2}\sin\left(\dfrac{x}{n}\right)$ *converge uniformément sur* $\mathbb{R}$, *on note* f *sa somme.*
Exprimer $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx$ *comme somme d'une série numérique.*

Exercice 6.

Soit $f_n(x) = e^{-nx}\sin\left(\dfrac{\pi}{2^n}\right)$, *le terme général d'une série de fonctions définies sur* $[0, +\infty[$. *Montrer qu'elle converge simplement vers une fonction* f *dérivable et que* $f'(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$.

Exercice 7.

On considère la série de fonctions définies sur $[0, 1]$ *par le terme général* $f_n(x) = \dfrac{x^n}{n^3(1 + x^n)}$.
(a) Etudier la convergence simple et la convergence uniforme de cette série sur l'intervalle $[0, 1]$.
(b) La fonction $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, *est-elle dérivable sur* $[0, 1]$ *?*

Exercice 8.

Soit $f_n(x) = \ln\left(1 + \dfrac{x}{n}\right) - \dfrac{x}{n}$, *le terme général d'une série de fonctions définies sur* $[0, 1]$.
(a) Etudier la convergence simple et la convergence uniforme de cette série sur l'intervalle $[0, 1]$.
(b) Montrer que la fonction $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ *est dérivable, calculer sa dérivée.*
(c) Calculer la valeur de la dérivée $f'(x)$ *au point* $x = 1$.

Exercice 9.

Soit (f_n) *la suite de fonctions définies sur* $[0, +\infty[$ *par* $f_n(x) = (-1)^n e^{-(n+1)x}$.
(a) Montrer que la série converge sur $[0, +\infty[$ *vers une fonction* f *continue.*
(b) Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$.
(c) En déduire l'égalité $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -\ln(2)$.

Exercice 10.

Soit $f_n(x) = \dfrac{1}{n^2 + n^3x^2}$, *le terme général d'une série de fonctions. Montrer qu'elle converge sur tout* $\mathbb{R}$ *vers une fonction* f *dérivable.*