

Devoir maison n°3

Soit  $f$  la fonction définie par

$$f(x) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} - \frac{1}{n+x}.$$

1. Quel est le domaine de définition  $I$  de  $f$  ?
2. Montrer que  $f$  est continue sur  $I$ .
3. Montrer que  $f$  est de classe  $C^1$  sur  $I$  et exprimer sa dérivée comme la somme d'une série.
4. Étudier la monotonie de la fonction  $f$ .
5. Calculer  $f(x+1) - f(x)$ .
6. Déterminer un équivalent de  $f$  en  $-1^+$ .
7. Établir l'égalité  $\forall n \in \mathbb{N}, f(n) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ .
8. En déduire un équivalent de  $f$  en  $+\infty$ .