**Année universitaire 2014-2015**

Site : ☐Luminy ☐St-Charles ☒St-Jérôme ☐Cht-Gombert ☐Aix-Montperrin ☐Aubagne-Satis
Sujet session : ☒1er semestre - ☐2ème semestre - ☐Session 2 Durée de l'épreuve : 2h
Examen de : ☐L1 / ☒L2 / ☐L3 - ☐M1 / ☐M2 - ☐LP - ☐DU Nom diplôme : MPCI
Code Apogée du module : SMP3U1J Libellé du module : Analyse 2
Document autorisé : ☐OUI - ☒NON Calculatrices autorisées : ☐OUI - ☒NON

---

*Les exercices sont indépendants et peuvent être traités dans le désordre. Vous pouvez sauter des questions sans les démontrer, mais admettre le résultat pour l'utiliser par la suite.*

**ATTENTION : l'énoncé du sujet contient 2 pages.**

# Exercice 1 (cours)

1. Rappeler la définition du grand O : c'est-à-dire que pour deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, définir ce que signifie l'égalité $a_n = \underset{n\to\infty}{O}(b_n)$.
2. Rappelez l'énoncé du théorème de comparaison avec un grand O.
3. Démontrer que la convergence absolue d'une série numérique entraîne sa convergence.
4. Donner une définition de la convergence uniforme d'une série de fonctions.

# Exercice 2

Déterminer la nature des séries suivantes.

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^3+\pi n-2}{n(n+1)^2}$
2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(\frac{(n+2)^2}{n^2}\right)$
3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}, \ x\in\mathbb{R}$

# Exercice 3

Soit $f$ la fonction définie par $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln(n+x) - \ln(n)}{n}$ pour $x \in \mathbb{R}_+$.

1. Étudier la convergence simple et la convergence uniforme sur $\mathbb{R}_+$ du terme général de la série de fonctions définissant $f$.
2. Montrer que la fonction $f$ est bien définie sur $\mathbb{R}_+$.
3. Montrer que la série de fonctions définissant $f$ converge normalement sur tous les intervalles $[0, a]$, pour $a > 0$. Y-a-t'il convergence normale sur $\mathbb{R}_+$ ?
4. Montrer que la fonction $f$ est continue sur $\mathbb{R}_+$.
5. Montrer que la fonction $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et que l'on a l'égalité

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+x)}, \quad \forall x \in \mathbb{R}_+.$$

6. Calculer $f'(1)$.
7. Calculer $\lim_{x \to +\infty} f'(x)$.
8. Calculer $\lim_{x \to +\infty} f(x)$.
9. Tracer l'allure de la courbe représentative de $f$.
10. (facultatif) Montrer que la fonction $f$ est développable en série entière.