Exercice 1 (cours)

Exercice 2

Déterminer la nature des séries suivantes.

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^3+\pi n-2}{n(n+1)^2}$
2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(\frac{(n+2)^2}{n^2}\right)$
3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n},\ x\in\mathbb{R}$

1. On a $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{n^3+\pi n-2}{n(n+1)^2} = 1$. Le terme général ne tend pas vers 0, donc la série diverge.
2. On a l'équivalent $\ln\left(\frac{(n+2)^2}{n^2}\right) = 2\ln\left(1+\frac{2}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{4}{n}$. Or, la série de terme général $\frac{4}{n}$ est une série à termes positifs divergente (série harmonique). Par théorème de comparaison, la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(\frac{(n+2)^2}{n^2}\right)$ diverge.
3. Utilisons la règle de d'Alembert. On a la limite $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{\frac{x^{n+1}}{n+1}}{\frac{x^n}{n}}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{nx}{n+1}\right| = |x|$. La série converge donc pour $|x|<1$ et elle diverge pour $|x|>1$. Il reste à déterminer sa nature pour $|x|=1$.
   (a) Pour $x=1$, c'est la série harmonique, qui diverge.
   (b) Pour $x=-1$, c'est une série alternée, et le critère des séries alternées s'applique puisque la suite $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\geq 1}$ décroît et tend vers 0. La série converge donc.

   La série converge donc si et seulement si x est dans l'intervalle $[-1,1[$.

Exercice 3

Soit f la fonction définie par $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln(n+x)-\ln(n)}{n}$ pour $x\in\mathbb{R}_+$.

1. Étudier la convergence simple et la convergence uniforme sur $\mathbb{R}_+$ du terme général de la série de fonctions définissant f.

Posons $f_n(x) = \frac{\ln(n+x)-\ln(n)}{n}$ le terme général de la série définissant f. Pour $x\in\mathbb{R}_+$ fixé, on a

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim_{n\to+} \frac{1}{n}\ln\left(1+\frac{x}{n}\right) = 0,$$

et donc la suite $(f_n)_{n\geq1}$ converge simplement vers la fonction nulle sur $\mathbb{R}_+$.
La convergence n'est pas uniforme sur $\mathbb{R}_+$ puisque l'on a $\|f_n\|_{\infty,\mathbb{R}_+} \geq \lim_{x\to+\infty} f_n(x) = +\infty$, $\forall n\geq 1$. En revanche, il y a bien convergence uniforme de la suite $(f_n)_{n\geq1}$ sur tous les intervalles de la forme $[0,a], a\in\mathbb{R}_+$, puisque l'on a $\|f_n\|_{\infty,[0,a]} = f_n(a) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

2. Montrer que la fonction f est bien définie sur $\mathbb{R}_+$.

Le terme général f_n est bien défini sur $\mathbb{R}_+$ pour tout $n\geq1$. Pour que $f(x)$ soit bien défini, il faut et il suffit donc que la série définissant $f(x)$ converge. Pour $x\in\mathbb{R}_+$ fixé, on a l'équivalent

$$f_n(x) = \frac{1}{n}\ln\left(1+\frac{x}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{x}{n^2}.$$

Or, la série à termes positifs $\displaystyle\sum_{n\geq1}\frac{x}{n^2} = x\sum_{n\geq1}\frac{1}{n^2}$ converge (série de Riemann d'exposant $2>1$).
Par théorème de comparaison, la série de terme général $(f_n(x))_{n\geq1}$ converge, et ce pour tout $x\in\mathbb{R}_+$. La fonction f est bien définie sur $\mathbb{R}_+$.

3. Montrer que la série de fonctions définissant f converge normalement sur tous les intervalles $[0,a]$, pour $a>0$. Y-a-t'il convergence normale sur $\mathbb{R}_+$?

Pour tout $n\geq1$, on a l'inégalité $\|f_n\|_{\infty,[0,a]} = f_n(a)$, puisque la fonction f_n est croissante. Or, la série de terme général $(f_n(a))_{n\geq1}$ converge d'après la question précédente, d'où la convergence normale sur $[0,a]$ de la série de terme général $(f_n)_{n\geq1}$. Il n'y a pas convergence normale (ni même uniforme) sur $\mathbb{R}_+$, puisque l'on a déjà vu à la question 1. que la suite $\left(\|f_n\|_{\infty,\mathbb{R}_+}\right)_{n\geq1}$ ne converge pas vers 0.

4. Montrer que la fonction f est continue sur $\mathbb{R}_+$.

Les fonctions $f_n, n \geq 1$ sont continues sur $\mathbb{R}_+$, et d'après la question précédente la série de terme général $(f_n)_{n\geq 1}$ converge normalement donc uniformément sur tous les intervalles $[0, a],\ a > 0$. On peut donc appliquer le théorème de continuité de la somme et on obtient que la fonction f est continue sur tous les intervalles $[0, a],\ a > 0$. Elle est donc continue sur $\mathbb{R}_+$.
Remarque : On pouvait aussi utiliser la question suivante et le fait que f dérivable $\Longrightarrow$ f continue.

5. Montrer que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et que l'on a l'égalité

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+x)}, \quad \forall x \in \mathbb{R}_+.$$

Appliquons le théorème de dérivation de la somme. Pour cela on vérifie que l'on a
— pour tout $n \geq 1$, f_n est dérivable sur $\mathbb{R}_+$,
— pour $x = 0$, $f_n(0) = 0$ est le terme général d'une série convergente,
— la série de terme général $(f'_n)_{n\geq 1}$ converge normalement donc uniformément sur $\mathbb{R}_+$ puisque l'on a

$$\left|f'_n(x)\right| = \frac{1}{n(n+x)} \leq \frac{1}{n^2},\ \forall x \in \mathbb{R}_+,\ \forall n \geq 1,$$

avec $\left(\frac{1}{n^2}\right)_{n\geq 1}$ qui est le terme général d'une série convergente (série de Riemann d'exposant $2 > 1$).
D'après le théorème de dérivation de la somme, la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et on a l'égalité

$$f'(x) = \sum_{n\geq 1} f'_n(x) = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n(n+x)}, \quad \forall x \in \mathbb{R}_+.$$

6. Calculer $f'(1)$.

D'après la question précédente, on a l'égalité $f'(1) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}$. On remarque que c'est une série télescopique puisque $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$. On a donc $f'(1) = \frac{1}{1} - \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N+1} = 1$.

7. Calculer $\lim_{x\to+\infty} f'(x)$.

On a vu à la question 5. que la série de terme général $(f'_n)_{n\geq 1}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$. Or, on a pour tout $n \geq 1$, $\lim_{x\to+\infty} f'_n(x) = 0$. On peut donc appliquer le théorème d'intervertion des limites, ce qui donne l'égalité

$$\lim_{x\to+\infty} f'(x) = \lim_{x\to+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} f'_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \lim_{x\to+\infty} f'_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} 0 = 0.$$

8. Calculer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

Les fonctions f_n sont positives sur $\mathbb{R}_+$, donc $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) \geq f_1(x) = \ln(1+x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$, d'où $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

9. Tracer l'allure de la courbe représentative de f.

La fonction f est croissante comme somme de fonctions croissantes (ou encore parce-que $f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+x)} \geq 0$ sur l'intervalle $\mathbb{R}_+$), et on a $f(0) = \sum_{n=1}^{+\infty} 0 = 0$. D'après la question 6. on sait que la courbe représentative de f a une tangente de pente 1 en 1. D'après les questions 7. et 8., on sait que la fonction f diverge en l'infini, mais avec une pente qui tend vers 0. La courbe représentative de f ressemble donc à celle de la fonction $x \mapsto 2\ln(x+1)$.

10. (facultatif) Montrer que la fonction f est développable en série entière.

Les fonctions f_n sont développables en séries entières en 0 sur l'intervalle $[0, 1[$, et on a $\forall x \in [0, 1[$,

$$f_n(x) = \frac{1}{n}\ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{n^{k+1}} x^k.$$

Or, d'après la question 3. la série de terme général $(f_n)_{n\geq 1}$ converge uniformément sur $[0, 1[$. On peut donc appliquer le théorème d'intervertion de limites, et on obtient pour tout $x \in [0, 1[$,

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{n^{k+1}} x^k = \sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{n^{k+1}} x^k = \sum_{k=1}^{+\infty} \left((-1)^{k+1} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{k+1}}\right) x^k.$$

Donc la fonction f est développable en série entière en 0 sur l'intervalle $[0, 1[$.