# TD 1 : Séries numériques

**Exercice 1** : Les séries suivantes convergent-elles ?

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(2+\frac{1}{3n}\right)$,
2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(3^n+\frac{1}{2n^2}\right)$.
3. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\sin(n)$.

**Exercice 2** : Soit $\displaystyle\sum_{n\geq 1} a_n$ une série téléscopique, c'est-à-dire dont le terme général peut s'écrire $a_n = b_{n+1} - b_n$ pour une suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

1. Vérifier que l'on a $\displaystyle\sum_{n=1}^{k} a_n = b_{k+1} - b_1$. Exprimer la somme de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} a_n$ à l'aide de la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. Soit $a_n = \dfrac{1}{\sum_{k=1}^{n} k}$. Vérifier que la série de terme général $a_n$ est téléscopique et en déduire la somme $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.
3. Même question pour $a_n = \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$.

**Exercice 3** : On considère la série numérique $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}$. On note $S_N = \displaystyle\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}$ sa $N$-ième somme partielle, et on pose $T_N = S_N - \ln(N+1)$.

1. Démontrer l'inégalité $\ln(x+1) - \ln(x) \leq \dfrac{1}{x}$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$.
2. En déduire la monotonie de la suite $(T_N)_{N\geq 0}$.
3. Que vaut $T_0$ ? En déduire que pour tout $N \geq 1$, on a $S_N \geq \ln(N+1)$.
4. Calculer la limite $\displaystyle\lim_{N\to\infty} S_N$. La série $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}$ est-elle convergente ?

**Exercice 4** : On considère la série numérique $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$. On note $S_N$ sa $N$-ième somme partielle.

1. Vérifier que $\forall n \geq 2,\ \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$.
2. En déduire que $\forall N \geq 2,\ \frac{3}{2} - \frac{1}{N+1} \leq S_N \leq 2 - \frac{1}{N}$.
3. En déduire que la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ est majorée.
4. Montrer que la série est convergente et que sa somme vérifie l'encadrement $\frac{3}{2} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \leq 2$.

**Exercice 5** : Déterminer la nature des séries dont les termes généraux sont les suivants.

1. $u_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}}, \quad n \geq 0$.
2. $u_n = \frac{\sum_{k=1}^{n-1} k!}{n!}, \quad n \geq 2$.
3. $u_n = \frac{\sum_{k=1}^{n-2} k!}{n!}, \quad n \geq 3$.
4. $u_n = \frac{1}{10n+1}, \quad n \geq 0$.
5. $u_n = \ln\left(\frac{2+n^2}{1+n^2}\right), \quad n \geq 1$.
6. $u_n = \frac{\sqrt{n^2+1}}{n}, \quad n \geq 1$.
7. $u_n = \frac{a}{n-1} - \frac{1}{n}, \quad a \in \mathbb{R}, n \geq 2$.

**Exercice 6** : Étudier la nature et calculer la somme de la série numérique de terme général

$$u_n = \frac{9}{(3n+1)(3n+4)}, \quad n \geq 0.$$

**Exercice 7** : Étudier la nature des séries suivantes.

1. $u_n = \frac{2n-1}{(\sqrt{2})^n}, \quad n \geq 1$.
2. $u_n = \frac{n}{2^n}, \quad n \geq 1$.
3. $u_n = \frac{\prod_{k=1}^{n}(2k-1)}{3^n n!}, \quad n \geq 1$.
4. $u_n = \frac{1}{(\ln(n+1))^n}, \quad n \geq 1$.
5. $u_n = \left(\frac{3n}{4n-1}\right)^{2n+1}, \quad n \geq 1$.

**Exercice 8** : Déterminer la nature des séries dont les termes généraux sont les suivants.

1. $u_n = \dfrac{\sin(n\alpha)}{n^2}, \quad \alpha \in \mathbb{R},\ n \geq 1.$
2. $u_n = (-1)^n \dfrac{n+1}{n}, \quad n \geq 1.$
3. $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n - \ln(n)}, \quad n \geq 1.$
4. $u_n = (-1)^{\frac{n^2+n}{2}} \dfrac{n}{2^n}, \quad n \geq 1.$
5. $u_n = \dfrac{n+3}{(-1)^n\sqrt{n} - 3n}, \quad n \geq 1.$
6. $u_n = \dfrac{1 + (-1)^n n}{n^2}, \quad n \geq 1.$

**Exercice 9** :

1. Discuter la convergence de la série de terme général $u_n = \dfrac{(-1)^n}{25n}$, $n \geq 1$ et estimer sa somme sans dépasser l'erreur tolérée de $10^{-2}$.
2. Même question avec la série de terme général $u_n = \dfrac{(-1)^n\sqrt{n}}{n+5}$, $n \geq 1$.

**Exercice 10** : Étudier les séries de termes généraux suivants.

1. $u_n = \dfrac{e^{in\theta}}{\ln(n)},\ \theta \in \mathbb{R},\ n \geq 2.$
2. $u_n = \dfrac{\cos(n)}{n + \cos(n)},\ n \geq 1.$
3. $u_n = \dfrac{\cos(n\theta)}{\sqrt{n}},\ \theta \in \mathbb{R},\ n \geq 0.$
4. $u_n = na^n,\ n \geq 1.$
5. $u_n = e^{-\sqrt{n}},\ n \geq 1.$
6. $u_n = n\left(\cos(1/n) - 1\right),\ n \geq 1$

**Exercice 11** : Montrer que les séries de termes généraux positifs $a_n$ et $\dfrac{a_n}{a_n + 1}$ sont de même nature.

**Exercice 12** : Soit $(a_n)_{n\geq 1}$ une suite de réels.

1. Montrer que si la série $\sum_{n\geq 0} a_n$ converge vers $S$, alors la série $\sum_{n\geq 0} a_n + a_{n+1}$ converge, et calculer sa somme.
2. Supposons que pour tout $n \geq 0$ on ait $a_n \geq 0$. Montrer que si la série $\sum_{n\geq 0} a_n + a_{n+1}$ converge vers T, alors la série $\sum_{n\geq 0} a_n$ converge et calculer sa somme.
3. Donner un exemple où la série $\sum_{n\geq 0} a_n + a_{n+1}$ converge et la série $\sum_{n\geq 0} a_n$ diverge.