

**TD 5 : Séries de Fourier**

**Exercice 1 :** Développer en série de Fourier la fonction continue et  $2\pi$ -périodique définie sur  $] -\pi, \pi[$  par  $f(x) = |x|$ . En déduire les sommes  $A = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$  et  $B = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}$ .

**Exercice 2 :** Développer en série de Fourier la fonction impaire et  $2\pi$ -périodique définie sur  $[0, \pi]$  par  $f(x) = x(\pi - x)$ . En déduire les sommes  $A = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}$  et  $B = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^6}$ .

**Exercice 3 :** Soit  $f$  une fonction continue  $2\pi$ -périodique. On suppose que la série de Fourier de  $f$  converge uniformément. Montrer que cette convergence a lieu vers la fonction  $f$ .

**Exercice 4 :** Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction régularisée,  $2\pi$ -périodique, impaire, constante égale à 1 sur  $]0, \pi[$ .

1. Calculer ses coefficients de Fourier trigonométriques.
2. Étudier la convergence simple et uniforme de la série de Fourier vers  $f$ .
3. En déduire les sommes

$$\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{2p+1} \quad \text{et} \quad \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2}.$$

4. Calculer les sommes

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}.$$

**Exercice 5 :** Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  l'application  $2\pi$ -périodique, paire, telle que  $\forall x \in [0, \pi], f(x) = x$ .

1. Calculer la série de Fourier de  $f$ .
2. Étudier la convergence simple et uniforme de la série de Fourier de  $f$ .
3. Déterminer les sommes

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^4}.$$

4. En déduire les sommes

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}.$$

**Exercice 6** : Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction  $2\pi$ -périodique et  $k$ -lipschitzienne. Pour  $n \in \mathbb{Z}$ , on pose

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-int} dt.$$

1. Pour tout  $h \in \mathbb{R}$ , on définit la fonction  $f_h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}, x \mapsto f(x+h) - f(x)$ . Calculer  $c_n(f_h)$  pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ .
2. En déduire que

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \sin^2\left(\frac{nh}{2}\right) |c_n(f)|^2 \leq \frac{(kh)^2}{4}.$$

3. En utilisant la concavité de la fonction sinus, montrer la convergence de la série  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} n^2 |c_n(f)|^2$ .
4. Que peut-on en conclure ?

Énoncé fourni par le CENTRALE-SUPELEC (CC)-BY-NC-SA.

**Exercice 7** :

1. Existe-t-il une fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  continue telle que les coefficients de Fourier soient :  $a_n = \frac{1}{2^n}$  et  $b_n = 0$  ?
2. Application : calculer  $\int_{t=0}^{\pi} \frac{dt}{5-4\cos t}$ .

**Exercice 8** : Soit  $a > 0$ .

1. Développer en série entière :  $f(x) = \frac{1}{x+e^a}$ .
2. En déduire le développement en série de Fourier de  $g(x) = \frac{1}{\cos x + \operatorname{ch} a}$ .

**Exercice 9** : Soit  $f$  la fonction  $2\pi$ -périodique telle que :  $\forall x \in [-\pi, \pi[, f(x) = e^x$ .

1. Chercher le développement en série de Fourier de  $f$ .
2. En déduire les sommes des séries :  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+1}$  et  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+1}$ .

**Exercice 10** : On considère la fonction  $2\pi$ -périodique sur  $\mathbb{R}$  définie par  $f(x) = x \sin\left(\frac{x}{2}\right)$  si  $0 \leq x < 2\pi$ .

1. Calculer les coefficients de Fourier de  $f$ .
2. Quelle est la nature de la série de Fourier  $S_f$  de  $f$  ?
3. En déduire la somme de la série  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{4n^2-1}$ .

**Exercice 11 : (Centrale MP 2000)**

1. Soit  $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Développer en série de Fourier la fonction  $2\pi$ -périodique valant  $e^{ax}$  sur  $]0, 2\pi[$ .
2. Calculer  $\sum_{n \geq 1} \frac{a}{a^2 + n^2}$ . En déduire  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ .
3. Que vaut  $\lim_{a \rightarrow +\infty} \sum_{n \geq 1} \frac{a}{a^2 + n^2}$  ?

**Exercice 12 :**

1. Développer en série de Fourier la fonction  $f$ ,  $2\pi$ -périodique telle que  $f(x) = \frac{\pi - x}{2}$  pour  $0 \leq x \leq 2\pi$ .
2. Donner les développements en série de Fourier de  $f(x+1)$  et  $f(x-1)$ .
3. Montrer que  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n)}{n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin^2(n)}{n^2}$ .

**Exercice 13 :** Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   $2\pi$ -périodique continue par morceaux. Que peut-on dire des coefficients de Fourier de  $f$  si l'on a :

1.  $\forall x \in \mathbb{R}, f(x + \pi) = f(x)$  ?
2.  $\forall x \in \mathbb{R}, f(x + \pi) = -f(x)$  ?

**Exercice 14 : (ENS)**

Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  continue  $2\pi$ -périodique paire dont la restriction à  $[0, 2\pi]$  est concave. Montrer que les coefficients de Fourier trigonométriques de  $f$  vérifient :  $a_k \leq 0$  pour  $k \geq 1$ .

**Exercice 15 :** Développer en série de FOURIER les fonctions suivantes puis déterminer la valeur des sommes indiquées :

1.  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   $2\pi$ -périodique paire telle que  $\forall x \in [0, \pi], f(x) = 1 - \frac{2x}{\pi}$ .  
En déduire  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$ ,  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$  et  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}$ .
2.  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   $2\pi$ -périodique impaire telle que  $\forall x \in [0, \pi], f(x) = x(\pi - x)$ . En déduire  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}$ ,  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^6}$  et  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^6}$ .
3.  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   $2\pi$ -périodique telle que  $\forall x \in ]-\pi, \pi[, f(x) = \sin\left(\frac{x}{2}\right)$ . En déduire  $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{2n+1}{16n^2+16n+3}$ .
4.  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   $2\pi$ -périodique telle que  $\forall x \in ]-\pi, \pi[, f(x) = \text{ch}(\lambda x)$  ( $\lambda$  réel strictement positif donné). En déduire  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\lambda^2+n^2}$ ,  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\lambda^2+n^2}$  et  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(\lambda^2+n^2)^2}$ .
5.  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  telle que  $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \sup(0, \sin x)$ . En déduire  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4p^2-1}$ .

**Exercice 16 :**

Soit  $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ . Soit  $f$  l'application de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{C}$ ,  $2\pi$ -périodique telles que  $\forall x \in [-\pi, \pi]$ ,  $f(x) = \cos(\alpha x)$ .

1. Développer la fonction  $f$  en série de Fourier.
2. En déduire que pour tout  $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ ,

$$\frac{\pi}{\sin(\pi z)} = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{2z}{z^2 - n^2} \text{ et } \pi \cotan(\pi z) = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2}.$$

**Exercice 17 :** Soit  $f_n(x) = \sum_{k=1}^n \frac{\sin kx}{k}$ .

1. Calculer l'abscisse,  $x_n$ , du premier maximum positif de  $f_n$ .
2. Déterminer  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x_n)$ .

**Exercice 18 :** Soit  $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$  une série trigonométrique convergeant uniformément sur un intervalle  $[\alpha, \beta]$ . Montrer que les suites  $(a_n)$  et  $(b_n)$  tendent vers 0.

**Exercice 19 :** Soit  $(a_n)$  une suite décroissante de limite nulle. Montrer que la série  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx$  converge uniformément sur  $\mathbb{R}$  si et seulement si  $\lim_{n \rightarrow \infty} na_n = 0$ .

(Pour le sens direct : utiliser le critère de convergence uniforme de Cauchy et l'inégalité :  $\sin x \geq \frac{2x}{\pi}$  sur  $[0, \pi/2]$ .)

**Exercice 20 :**

1. Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  paire,  $2\pi$ -périodique, telle que, pour tout  $x \in [0, \pi]$ ,  $f(x) = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p^2} \sin\left((2p^3 + 1)\frac{x}{2}\right)$ . Vérifier que  $f$  est définie et continue sur  $\mathbb{R}$ .
2. Soit  $A_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) dt$ , pour  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $A_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \cos(nt) dt$ .  
Pour  $\nu \in \mathbb{N}$ , on pose  $a_{0,\nu} = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \sin\left((2\nu + 1)\frac{t}{2}\right) dt$  et  $a_{n,\nu} = \int_0^{\pi} \cos(nt) \sin\left((2\nu + 1)\frac{t}{2}\right) dt$ .  
Pour  $q \in \mathbb{N}$ , on note  $s_{q,\nu} = \sum_{i=0}^q a_{i,\nu}$ . Montrer que si  $\nu$  est fixé,  $s_{n,\nu} \rightarrow 0$  lorsque  $n \rightarrow \infty$ . Calculer explicitement les  $a_{n,\nu}$ . En déduire que, pour tout  $q$ , pour tout  $\nu$ ,  $s_{q,\nu} > 0$ , et prouver que  $\max_{q \in \mathbb{N}} (s_{q,\nu}) = s_{\nu,\nu}$ .
3. Montrer qu'il existe  $B > 0$  tel que, pour tout  $\nu \geq 1$ ,  $s_{\nu,\nu} \geq B \ln \nu$ .
4. Montrer que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $A_n = \frac{2}{\pi} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p^2} a_{n,2p^3-1}$ .
5. Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose  $T_n = \frac{\pi}{2} \sum_{k=0}^n A_k$ . Vérifier que  $T_n = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p^2} s_{n,2p^3-1}$ . Montrer qu'il existe  $D > 0$  tel que, pour tout  $p \geq 1$ ,  $T_{2p^3-1} \geq Dp$ , et constater que la série de Fourier de  $f$  diverge au point 0.

**Exercice 21 :** On pose  $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{\sqrt{n}}$ .

1. Montrer que  $f$  est bien définie sur  $\mathbb{R}$ ,  $2\pi$ -périodique et continue sur  $\mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$ .
2. Calculer  $\lim_{a \rightarrow 0^+} \int_{t=a}^{\pi-a} f(t) \sin(pt) dt$  et en déduire que  $f$  n'a pas de développement en série de Fourier (et donc n'est pas continue en 0).