TD 3 : Séries de fonctions

Exercice 1 : Déterminer la convergence simple et la convergence uniforme des séries de fonctions dont les termes généraux sont les suivants.

1. $u_n(x) = x^n(1 - x^n),\ x \in [0, 1]$
2. $v_n(x) = \dfrac{x}{n(1 + nx^2)},\ x \in \mathbb{R}$
3. $w_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{n + x^2},\ x \in \mathbb{R}$
4. $x_n(x) = \dfrac{1}{n} \sin\left(\dfrac{x}{n}\right),\ x \in \mathbb{R}$
5. $y_n(x) = \dfrac{\sin(nx)}{1 + n^2x^2},\ x > 0$

Exercice 2 : Étudier les domaines de convergence simple et de convergence uniforme des séries des fonctions définies par les termes généraux

1. $a_n(x) = \dfrac{\sin(2^n\pi x)}{2^n}$,
2. $b_n(x) = e^{-n^2x}$,
3. $c_n(x) = \dfrac{1}{n^2 + x^2}$,
4. $t_n(x) = \dfrac{e^{-n^2x^2}}{n^2}$,
5. $s_n(x) = \dfrac{1}{2^{n-1}\sqrt{1 + nx}}$,
6. $z_n(x) = \dfrac{\cos(nx)}{e^{nx}}$.

Exercice 3 : Soit la série de fonctions de terme général $f_n(x) = \dfrac{\cos(nx)}{n^p}$.

1. Montrer que si $p > 1$, elle converge uniformément sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que la convergence est uniforme pour $0 < p \leq 1$ dans tout intervalle $[\alpha, \beta]$ où $k\pi < \alpha < \beta < (k + 1)\pi$.

Exercice 4 : Soit $(f_n)_{n\geq1}$ la suite de fonctions définies sur $[0, +\infty[$ par $f_n(x) = \dfrac{x}{x^2 + n^2}$.

1. Soit $M > 0$. Montrer que la série de terme général $(f_n)_{n\geq1}$ converge normalement sur $[0, M]$.
2. En déduire que la fonction somme $f = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ est continue sur $\mathbb{R}_+$.
3. Étudier la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geq1}(-1)^n f_n$ sur $[0, \infty[$.

Exercice 5 : Montrer que la série de fonctions définie par son terme général $f_n(x) = \dfrac{1}{n^2} \sin\left(\dfrac{x}{n}\right)$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$. On note f sa somme; exprimer $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx$ comme somme d'une série numérique.

Exercice 6 : Soit $f_n(x) = e^{-nx}\sin(\frac{\pi}{2^n})$ le terme général d'une série de fonctions définies sur $[0, +\infty[$. Montrer qu'elle converge simplement vers une fonction f dérivable et que $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$.

Exercice 7 : On considère la série de fonctions définies sur $[0, 1]$ par le terme général $f_n(x) = \dfrac{x^n}{n^3(1+x^n)}$.

1. Étudier la convergence simple et la convergence uniforme de cette série sur l'intervalle $[0, 1]$.
2. La fonction $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ est-elle dérivable sur $[0, 1]$?

Exercice 8 : Soit $f_n(x) = \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) - \frac{x}{n}$ le terme général d'une série de fonctions définies sur [0,1].

1. Étudier la convergence simple et la convergence uniforme de cette série sur l'intervalle $[0, 1]$.
2. Montrer que la fonction $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ est dérivable et exprimer sa dérivée en fonction des dérivées des fonctions f_n.
3. Calculer la valeur de la dérivée $f'(x)$ au point $x = 1$.

Exercice 9 : Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de fonctions définies sur $[0, +\infty[$ par $f_n(x) = (-1)^n e^{-(n+1)x}$.

1. Montrer que la série de terme général $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge sur $\mathbb{R}_+$ vers une fonction f continue.
2. Montrer que l'on a $\lim_{N\to\infty} \int_0^N f(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$.
3. En déduire l'égalité $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -\ln(2)$.

Exercice 10 : Soit $f_n(x) = \dfrac{1}{n^2 + n^3 x}$ le terme général d'une série de fonctions. Montrer qu'elle converge sur $\mathbb{R}$ vers une fonction f dérivable.

Exercice 11 : Montrer que la fonction $f(x) = \sum_{n\geq 0} \dfrac{1}{1+x^n}$ est définie sur $]1, +\infty[$. Montrer qu'elle est de classe C^1 sur $]1, \infty[$, et tracer son graphe.

Exercice 12 : Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $S(x) = \sum_{n\geq 1} \dfrac{(\cos(x))^n \sin(nx)}{n}$.

1. Justifier que S est définie sur $\mathbb{R}$ et π-périodique.
2. Montrer que S est de classe C^1 sur $]0, \pi[$ et calculer sa dérivée. En déduire une expression de S sur $[0, \pi]$