Aix-Marseille Université - Licence MPCI **Année 2014/2015**
Analyse 2 – Semestre 3 **Enseignant : P. Mercat**

Corrigé du premier devoir maison

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par

$$a_0 = 2 \quad \text{et} \quad a_{n+1} = \frac{a_n + 2/a_n}{2}, \quad \forall n \geq 0.$$

1. Démontrer que pour tout $n \geq 0$, on a $a_n > 0$.

Montrons-le par récurrence sur n.
C'est vrai pour $n = 0$, et si l'on a $a_n > 0$, alors on a $a_{n+1} = \frac{a_n+2/a_n}{2} > 0$.

2. Etudier les variations de la fonction $x \mapsto x + 1/x$ sur $\mathbb{R}+$.

Soit $f(x) = x + 1/x$. La fonction f n'est pas définie en 0. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et l'on a

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2}.$$

On obtient donc le tableau de variation

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\Vert$ $+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

3. En déduire que pour tout $n \geq 0$, $a_n \geq \sqrt{2}$.

On a l'inégalité

$$\frac{a_{n+1}}{\sqrt{2}} = \frac{\frac{a_n}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}}{a_n}}{2} = \frac{1}{2} f\left(\frac{a_n}{\sqrt{2}}\right) \geq 1$$

d'après les variations de f sur $\mathbb{R}_+^*$. D'où $a_{n+1} \geq \sqrt{2}$ pour tout $n \geq 0$. On a aussi $a_0 = 2 \geq \sqrt{2}$.

4. Montrer que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1 + \frac{2}{a_n^2}}{2} = \frac{1 + \left(\frac{\sqrt{2}}{a_n}\right)^2}{2} \leq \frac{1 + 1^2}{2} = 1$$

d'après la question précédente. On a donc $a_{n+1} \leq a_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, le réel a_n étant strictement positif d'après la question 1. D'où la décroissance de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

5. Montrer que la suite converge et calculer sa limite.

La suite converge puisqu'elle est décroissante d'après la question 4 et qu'elle est minorée d'après la question 3. Posons $l = \lim_{n\to\infty} a_n$. En faisant tendre n vers l'infini dans l'égalité $a_{n+1} = \frac{a_n + 2/a_n}{2}$, on obtient $l = \frac{l+2/l}{2}$. On a donc $l^2 = 2$, d'où $l = \pm\sqrt{2}$. Or, d'après la question 1, on a $l \geq 0$. La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge donc vers $\sqrt{2}$.

6. Posons $a_n = \sqrt{2} + \epsilon_n$. Montrer que l'on a $a_{n+1} = \sqrt{2} + \epsilon_n^2/4 + \underset{n\to\infty}{o}\left(\epsilon_n^2\right)$.

L'égalité

$$a_{n+1} = \frac{a_n + 2/a_n}{2}$$

devient

$$a_{n+1} = \frac{\sqrt{2} + \epsilon_n + \frac{2}{\sqrt{2}+\epsilon_n}}{2}.$$

En utilisant le développement limité $\dfrac{1}{1+x} = 1 - x + \dfrac{x^2}{2} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right)$ en $x = \epsilon_n/\sqrt{2}$, on a

$$\frac{2}{\sqrt{2}+\epsilon_n} = \frac{\sqrt{2}}{1+\epsilon_n/\sqrt{2}} = \sqrt{2}\left(1 - \frac{\epsilon_n}{\sqrt{2}} + \left(\frac{\epsilon_n}{\sqrt{2}}\right)^2 + \underset{n\to\infty}{o}\left(\epsilon_n^2\right)\right).$$

On a bien le droit de faire cela, puisque $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \epsilon_n = 0$ d'après la question 5. On obtient donc

$$a_{n+1} = \frac{\sqrt{2} + \epsilon_n + \sqrt{2}\left(1 - \frac{\epsilon_n}{\sqrt{2}} + \left(\frac{\epsilon_n}{\sqrt{2}}\right)^2 + \underset{n\to\infty}{o}\left(\epsilon_n^2\right)\right)}{2} = \sqrt{2} + \frac{\epsilon_n^2}{2\sqrt{2}} + \underset{n\to\infty}{o}\left(\epsilon_n^2\right)$$

(Il y avait une petite erreur dans l'énoncé !)

7. En déduire que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge à une vitesse doublement exponentielle : a_n donne une approximation de sa limite avec un nombre de décimales correctes qui double à chaque fois que n augmente de 1.

L'erreur qui est faite en approximant $\sqrt{2}$ par la suite a_n est donnée par ϵ_n. Le nombre de décimales correctes après la virgule de cette approximation de $\sqrt{2}$ est le nombre de zéros après la virgule avant de tomber sur un chiffre non nul du nombre ϵ_n, ce qui vaut environ $-\log_{10}(\epsilon_n)$. D'après ci-dessus, on a $\epsilon_{n+1} = \epsilon_n^2/(2\sqrt{2}) + \underset{n\to\infty}{o}\left(\epsilon_n^2\right)$, donc

$$-\log_{10}(\epsilon_{n+1}) = -\log_{10}\left(\frac{\epsilon_n^2}{2\sqrt{2}}\left(1 + \underset{n\to\infty}{o}(1)\right)\right) = 2(-\log_{10}(\epsilon_n)) + \log_{10}\left(2\sqrt{2}\right) + \underset{n\to\infty}{o}(1).$$

Pour n assez grand, le terme $\log_{10}\left(2\sqrt{2}\right) + \underset{n\to\infty}{o}(1)$ est positif, ce qui donne l'inégalité $-\log_{10}(\epsilon_{n+1}) \geq 2(-\log_{10}(\epsilon_n))$, et donc le nombre de décimales correctes après la virgule double en passant de a_n à a_{n+1}.
Voici les premières valeurs de la suite a_n :
$a_0 = 2.0000000000000000000000000000000000000000000000000000000000$... (0 décimale correcte)
$a_1 = 1.5000000000000000000000000000000000000000000000000000000000$... (1 décimale correcte)
$a_2 = 1.4166666666666666666666666666666666666666666666666666666667$... (3 décimales correctes)
$a_3 = 1.4142156862745098039215686274509803921568627450980392156863$... (6 décimales correctes)
$a_4 = 1.4142135623746899106262955788901349101165596221157440445849$... (12 décimales correctes)
$a_5 = 1.4142135623730950488016896235025302436149819257761974284983$... (24 décimales correctes)
$a_6 = 1.4142135623730950488016887242096980785696718753772340015610$... (48 décimales correctes)
$a_7 = 1.4142135623730950488016887242096980785696718753769480731767$...
et voici la valeur de la limite :
$\sqrt{2} = 1.4142135623730950488016887242096980785696718753769480731767$...
On voit qu'en pratique le nombre de décimales correctes double bien, et ce dès le début.