Corrigé du devoir maison n°2

1. Discuter la convergence de la série de terme général $u_n = \dfrac{(-1)^n}{25n}$, $n \geq 1$ et estimer sa somme sans dépasser l'erreur tolérée de 10^{-2}.

C'est une série alternée puisque le terme général s'écrit sous la forme $u_n = (-1)^n a_n$ avec $a_n = \frac{1}{25n} \geq 0$ pour tout $n \geq 1$. De plus, cette série vérifie le critère des séries alternées puisque la suite $(a_n)_{n\geq 1}$ décroît et tend vers 0. On a donc la convergence de la série, et on a de plus l'inégalité $|R_N| \leq a_{N+1}$ pour tout $N \geq 1$, où $R_N = \sum_{n=N+1}^{\infty} u_n$ est le reste de la série. On sait même que le reste R_N est de même signe que son premier terme a_{N+1}.
Pour trouver une approximation à 10^{-2} près de la somme $S = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ de la série, il suffit de considérer la somme partielle $S_N = \sum_{n=1}^{N} u_n$ pour un N assez grand pour que $|R_N| \leq 10^{-2}$. D'après ci-dessus, il suffit pour cela que l'on ait $a_{N+1} \leq 10^{-2}$. Cette dernière inégalité équivaut à $N \geq 3$. On a finalement l'encadrement

$$0 \leq R_3 \leq 10^{-2} \Longrightarrow S \geq S - R_3 \geq S - 10^{-2} \Longrightarrow S \geq S_3 \geq S - 10^{-2} \Longrightarrow S_3 \leq S \leq S_3 + 10^{-2}$$

Or, on a

$$S_3 = \frac{1}{25}\left(\frac{-1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{-1}{3}\right) = \frac{-1}{30} \approx -0.033 \text{ à } \pm 10^{-3} \text{ près.}$$

On a donc l'encadrement $-0.04 \leq S \leq -0.02$, et la valeur -0.03 est une approximation à $\pm 10^{-2}$ près de la somme S.

Remarque. *Il est possible ici de calculer la valeur exacte de la somme en remarquant que l'on a*

$$S_N = \frac{-1}{25}\sum_{n=1}^{N}\int_0^1 (-t)^{n-1}dt = \frac{-1}{25}\int_0^1 \sum_{n=1}^{N}(-t)^{n-1}dt = \frac{-1}{25}\int_0^1 \frac{1-(-t)^N}{1+t}dt$$

et donc

$$S_N = \frac{-\ln(2)}{25} + \frac{-1}{25}\int_0^1 \frac{(-t)^N}{1+t}dt.$$

Or, le deuxième terme tend vers 0 *quand* N *tend vers* $+\infty$, *puisque l'on a*

$$\left|\int_0^1 \frac{(-t)^N}{1+t}dt\right| \leq \int_0^1 \left|\frac{(-t)^N}{1+t}\right| dt = \int_0^1 \frac{t^N}{1+t}dt \leq \int_0^1 t^N dt = \frac{1}{N+1} \xrightarrow[N\to\infty]{} 0.$$

Ainsi, la valeur exacte de la somme est $S = \dfrac{-\ln(2)}{25}$.

2. Même question avec la série de terme général $u_n = \dfrac{(-1)^n\sqrt{n}}{n+5}$, $n \geq 1$.

C'est encore une série alternée, puisque le terme général est de la forme $u_n = (-1)^n a_n$ avec $a_n = \dfrac{\sqrt{n}}{n+5} \geq 0$ pour tout $n \geq 1$. Etudions les variations de la fonction $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{x+5}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
La fonction est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, et on a $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f'(x) = \dfrac{5-x}{\sqrt{x}(x+5)^2}$. Ainsi la dérivée $f'(x)$ est négative pour tout $x \geq 5$, et donc la fonction f est décroissante sur l'intervalle $[5, +\infty[$. On en déduit que la suite $(a_n)_{n\geq 5}$ est décroissante. De plus, on a $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, et donc la série de terme général $(u_n)_{n\geq 5}$ vérifie le critère des séries alternées. C'est donc une série convergente, et son reste $R_N = \displaystyle\sum_{n=N+1}^{\infty} u_n$ est compris entre 0 et son premier terme u_{N+1} pour tout $N \geq 4$. Or, la convergence d'une série ne dépend pas de ses premiers termes, et le reste R_N de la série de terme général $(u_n)_{n\geq 5}$ est le même que celui de la série de terme général $(u_n)_{n\geq 1}$ dès que $N \geq 4$, puisque la somme $R_N = \sum_{n=N+1}^{\infty} u_n$ ne fait intervenir que les termes de la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ d'indices $\geq N+1$.
Ainsi, on a bien montré la convergence de la série de terme général $(u_n)_{n\geq 1}$, et pour tout $N \geq 4$ on a

$$0 \leq (-1)^{N+1} R_N \leq a_{N+1}.$$

Pour avoir une approximation à 10^{-2} près de la somme de la série de terme général $(u_n)_{n\geq 1}$, il suffit donc de considérer la somme partielle $S_N = \sum_{n=1}^{N} u_n$ pour un $N \geq 4$ assez grand pour avoir $|R_N| \leq a_{N+1} \leq 10^{-2}$.
On a pour tout $N \geq 4$

$$a_{N+1} \leq 10^{-2} \Longleftrightarrow \frac{N+1}{(N+1+5)^2} \leq 10^{-4} \Longleftrightarrow 10^4(N+1) \leq (N+6)^2 \Longleftrightarrow N \geq 9989.$$

On a donc l'encadrement

$$0 \leq R_{9989} \leq 10^{-2} \Longrightarrow S \geq S - R_{9989} \geq S - 10^{-2} \Longrightarrow S \geq S_{9989} \geq S - 10^{-2} \Longrightarrow S_{9989} \leq S \leq S_{9989} + 10^{-2}.$$

Un petit calcul à l'ordinateur fournit une valeur approchée de S_{9989} :

$$S_{9989} \approx -0.076 \text{ à } \pm 10^{-3} \text{ près.}$$

Ainsi, on a l'encadrement $-0.08 \leq S \leq -0.06$ et la valeur -0.07 est une approximation de la somme S à $\pm 10^{-2}$ près.

Remarque. *Pour faire le calcul de la somme S_{9989}, on peut par exemple utiliser le logiciel de calcul formel* **sage**. *Il est gratuit et open source, et on peut le télécharger ici : http://www.sagemath.org/fr/telecharger.html*

Remarque. *On peut démontrer que la série est convergente en écrivant :*

$$u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{5(-1)^n}{n\sqrt{n}} + \underset{n\to\infty}{o}\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)$$

On a alors la série de terme général $\left(\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)_{n\geq 1}$ qui converge par le critère des séries alternées. Pour le reste, on a l'équivalent $u_n - \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \underset{n\to\infty}{\sim} \dfrac{-5(-1)^n}{n\sqrt{n}}$. Or, la série de terme général $\left(\dfrac{-5(-1)^n}{n\sqrt{n}}\right)_{n\geq 1}$ converge ***absolument*** *(c'est-à-dire que la série de terme général $\left(\dfrac{5}{n\sqrt{n}}\right)_{n\geq 1}$ converge), puisqu'on obtient une série de Riemann d'exposant $\alpha = 3/2 > 1$. On peut donc utiliser un théorème de comparaison sur les séries à* ***termes positifs*** *pour obtenir la convergence absolue (et donc la convergence) de la série de terme général $\left(u_n - \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)_{n\geq 1}$. La série de terme général $(u_n)_{n\geq 1}$ converge donc comme somme de séries convergentes. Mais cette méthode ne permet pas d'estimer le reste.*