Corrigé du devoir maison n°3

Soit f la fonction définie par

$$f(x) = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n} - \frac{1}{n+x}.$$

1. Quel est le domaine de définition I de f ?

Posons $f_n(x) = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+x}$ le terme général de la série définissant $f(x)$. Pour tout $n \geq 1$, la fonction f_n est définie sur $\mathbb{R}\backslash\{-n\}$. La fonction f n'est donc pas définie en $x \in \mathbb{Z}_{\leq -1} = \{-1, -2, -3, ...\}$. Montrons qu'elle est définie sur $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}_{\leq -1}$. Pour $x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}_{\leq -1}$ fixé, on a

$$f_n(x) = \frac{x}{n(n+x)} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{x}{n^2}.$$

Or, la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left|\frac{x}{n^2}\right| = |x| \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann convergente (son exposant est $2 > 1$).
Par théorème de comparaison, la série définissant $f(x)$ est absolument convergente, donc convergente. Ainsi, le domaine de définition de f est $I = \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}_{\leq -1}$.

2. Montrer que f est continue sur I.

On souhaite appliquer le théorème de continuité de la somme pour montrer la continuité de f sur I. On a bien $\forall n \geq 1$, f_n continue sur I. Montrons que l'on a convergence normale de la série sur tout segment $[a, b]$ inclus dans I (on doit se restreindre à des segments parce-qu'il n'y a pas convergence uniforme sur I tout entier). Pour $x \in [a, b] \subseteq I$, on a d'une part

$$|x| \leq \max(|a|, |b|),$$

et d'autre part

$$|n + x| = n + x \geq n + a, \quad \forall n > -a.$$

On a donc

$$|f_n(x)| = \left|\frac{x}{n(n+x)}\right| \leq \frac{\max(|a|, |b|)}{n(n+a)}, \quad \forall n > -a,\ \forall x \in [a, b] \subseteq I.$$

Le majorant obtenu ne dépend pas de x, et c'est le terme général d'une série convergente puisque l'on a

$$\frac{\max(|a|, |b|)}{n(n+a)} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{\max(|a|, |b|)}{n^2}.$$

La série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ étant une série de Riemann convergente, par théorème de comparaison la série à termes positifs $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{\max(|a|, |b|)}{n(n+a)}$ est bien convergente. On a donc bien montré la convergence normale de la série de terme général f_n sur $[a, b] \subseteq I$. On a donc aussi la convergence uniforme sur tout segment $[a, b] \subseteq I$, et on peut donc appliquer le théorème de continuité de la somme. La fonction f est donc continue sur tout segment $[a, b] \subseteq I$. Elle est donc continue sur tout I puisque la continuité est une notion qui se vérifie point par point (mais on a pas convergence uniforme de la série sur I).

Remarque. *On pouvait aussi utiliser la question suivante et le fait que f dérivable $\Longrightarrow$ f continue.*

3. Montrer que f est de classe C^1 sur I et exprimer sa dérivée comme la somme d'une série.

On cherche à appliquer le théorème de dérivation de la somme. Pour cela, on vérifie que :

- Pour tout $n \geq 1$, f_n est de classe C^1 sur I. La fonction f_n est dérivable et on a $f_n'(x) = \frac{1}{(n+x)^2}$ qui est bien continue sur $I = \mathbb{R} \backslash \mathbb{Z}_{\leq -1}$.
- La série de terme général f_n est bien convergente en au moins un point de I puisque d'après la question 1 elle converge même simplement sur tout I.
- La série de terme général f_n' converge uniformément. On ne pourra pas montrer la convergence uniforme sur tout I; nous allons donc montrer la convergence normale sur tout segment $[a, b]$ inclus dans I. On a la majoration

$$|f_n'(x)| = \frac{1}{(n+x)^2} \leq \frac{1}{(n+a)^2}, \quad \forall n > -a, \ \forall x \in [a, b].$$

D'où l'inégalité $\|f_n'\|_{\infty,[a,b]} \leq \dfrac{1}{(n+a)^2}$ pour tout $n > -a$. Or, la série de terme général positif $\left(\dfrac{1}{(n+a)^2}\right)_{n>-a}$ converge par théorème de comparaison, puisque l'on a l'équivalent $\dfrac{1}{(n+a)^2} \underset{n\to\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^2}$ et que la série de Riemann $\displaystyle\sum_{n>-a} \frac{1}{n^2}$ est convergente.

On a donc bien montré la convergence normale et donc uniforme de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} f_n'$ sur tout segment $[a, b] \subseteq I$.

D'après le théorème de dérivation de la somme et d'après le théorème de continuité appliqué à la série des dérivées, la fonction f est donc de classe C^1 sur tout segment $[a, b] \subseteq I$, et on a l'égalité

$$f'(x) = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{(n+x)^2}, \quad \forall x \in [a, b].$$

Ceci étant vrai pour tout segment $[a, b] \subseteq I$, la fonction f est donc de classe C^1 sur I et l'égalité ci-dessus est vrai pour tout $x \in I$ (mais on a pas la convergence uniforme sur tout I).

4. Étudier la monotonie de la fonction f.

Les fonctions f_n sont croissantes sur chaque intervalle inclus dans I, puisque $f_n'(x) = \dfrac{1}{(n+x)^2} \geq 0,\ \forall x \in I$. La somme f est donc aussi croissante sur chaque intervalle inclus dans I.
On pouvait aussi voir cela en utilisant la question précédente : $f'(x) = \displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{(n+x)^2} \geq 0.$
Il reste à voir ce qui se passe autour des points qui ne sont pas dans I. Montrons que pour tout $k \geq 1$, $\lim_{\substack{x\to -k\\ x>-k}} f(x) = -\infty$ et $\lim_{\substack{x\to -k\\ x<-k}} f(x) = +\infty$. On a

$$f(x) = f_k(x) + \sum_{\substack{n\geq 1\\ n\neq k}} f_n(x).$$

Or, pour $x \in [-k - \frac{1}{2}, -k + \frac{1}{2}]$, la somme $\displaystyle\sum_{\substack{n\geq 1\\ n\neq -k}} f_n(x)$ converge et est bornée, puisque l'on a

$$|f_n(x)| = \frac{|x|}{n(n+x)} \leq \frac{k+\frac{1}{2}}{n(n-k-\frac{1}{2})}, \quad \forall n \geq k + \frac{1}{2},$$

avec $\dfrac{k+\frac{1}{2}}{n(n-k-\frac{1}{2})}$ qui est le terme général d'une série convergente ne dépendant plus de $x \in [-k - \frac{1}{2}, -k + \frac{1}{2}]$, et puisque les fonctions $f_n,\ n \neq k$ sont définies et continues sur $[-k - \frac{1}{2}, -k + \frac{1}{2}]$.
On a d'autre part $\lim_{\substack{x\to -k\\ x>-k}} f_k(x) = -\infty$ et $\lim_{\substack{x\to -k\\ x<-k}} f_k(x) = +\infty$, d'où les limites de f en $-k$ annoncées.
La fonction f n'est donc pas monotone sur I, mais elle l'est sur chaque intervalle $]-k, -k+1[,\ k \geq 1$ et sur $]-1, +\infty[$. Voici son tableau de variations :

x	$\cdots$		-3		-2		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	‖	$+$	‖	$+$	‖	$+$	
$f(x)$		↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	$+\infty$

5. Calculer $f(x+1) - f(x)$.

Pour tout $N \geq 1$ et $x \in I$, on a $x + 1 \in I$ et on a l'égalité

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} - \frac{1}{n+x+1} - \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} - \frac{1}{n+x} = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n+x} - \frac{1}{n+x+1} = \frac{1}{1+x} - \frac{1}{N+1+x},$$

puisque l'on a une somme téléscopique.
En faisant tendre N vers l'infini, on obtient $f(x+1) - f(x) = \dfrac{1}{1+x},\ \forall x \in I.$

6. Déterminer un équivalent de f en -1^+.

La fonction f est continue en 0 d'après 2. On a donc $\lim\limits_{x\to -1^+} (1+x)f(x+1) = 0$, et donc $f(x+1) = \underset{x\to-1^+}{o}\left(\dfrac{1}{1+x}\right)$. En utilisant 5. on obtient donc

$$f(x) = f(x+1) - \frac{1}{1+x} \underset{x\to-1^+}{\sim} \frac{-1}{1+x}$$

7. Établir l'égalité $\forall n \in \mathbb{N},\ f(n) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

- $f(0) = 0 = \sum_{k=1}^{0} \frac{1}{k}$.
- Si $f(n) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$, alors d'après 5. on a $f(n+1) = f(n) + \dfrac{1}{n+1} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k}$.

8. En déduire un équivalent de f en $+\infty$.

Commençons par donner un équivalent de $f(n)$ quand $n \in \mathbb{N}$ tend vers l'infini.
Par décroissance de $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ on a pour tout $n \geq 1$ et $x \in [n, n+1]$ l'inégalité

$$\frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{n}.$$

En intégrant de part et d'autre entre n et $n+1$, on obtient l'inégalité

$$\frac{1}{n+1} \leq \int_n^{n+1} \frac{dx}{x} \leq \frac{1}{n}.$$

En sommant cela de $n = 1$ à $N-1$, on trouve

$$-1 + \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} = \sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{n+1} \leq \int_1^N \frac{dx}{x} \leq \sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{n} = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} - \frac{1}{N+1}.$$

En utilisant 7., on en déduit l'encadrement

$$\ln(N) + \frac{1}{N+1} \leq f(N) \leq \ln(N) + 1.$$

Or, on a $\ln(N) + \dfrac{1}{N+1} \underset{N\to\infty}{\sim} \ln(N) + 1 \underset{N\to\infty}{\sim} \ln(N)$, puisque $\lim\limits_{N\to+\infty} \ln(N) = +\infty$.
Par théorème des gendarmes, on a l'équivalent $f(N) \underset{N\to\infty}{\sim} \ln(N)$.
Par croissance de f sur $\mathbb{R}_+$ (d'après la question 4.), on a l'inégalité

$$f(\lfloor x \rfloor) \leq f(x) \leq f(\lfloor x+1 \rfloor),$$

où $\lfloor x \rfloor$ est la partie entière de x. Or, on a

$$f(\lfloor x \rfloor) \underset{x\to+\infty}{\sim} \ln(\lfloor x \rfloor) \underset{x\to+\infty}{\sim} \ln(\lfloor x+1 \rfloor) \underset{x\to+\infty}{\sim} f(\lfloor x+1 \rfloor)$$

puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} \lfloor x \rfloor = +\infty$ et $\ln(n+1) = \ln(n) + \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right) \underset{n\to\infty}{\sim} \ln(n)$. Par le théorèmes des gendarmes, on a donc $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \ln(\lfloor x \rfloor)$. Or, on a $\ln(\lfloor x \rfloor) = \ln(x) + \ln\left(\dfrac{\lfloor x \rfloor}{x}\right) \underset{x\to+\infty}{\sim} \ln(x)$ puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln\left(\frac{\lfloor x \rfloor}{x}\right)}{\ln(x)} = \dfrac{0}{+\infty} = 0$. Finalement on a $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \ln(x)$.