Corrigé de l'examen

7 janvier 2015

Exercice 1 (cours)

1. Rappeler ce qu'est la convergence absolue d'une série numérique.

Une série numérique $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ converge absolument si la série $\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|$ converge.

2. Rappeler la définition de la convergence uniforme d'une suite de fonctions.

Une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur I vers une fonction f si $\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, \forall x \in I, |f_n(x) - f(x)| \leq \epsilon$.

3. Donner un exemple de série entière qui converge normalement sur tout son disque de convergence. Justifier la réponse.

La série entière $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2}$ a pour rayon de convergence 1 (se retrouve avec le critère de d'Alembert). En outre elle converge normalement donc uniformément sur le disque de rayon 1 puisque l'on a pour tout $|x| \leq 1$, $\left|\frac{x^2}{n^2}\right| \leq \frac{1}{n^2}$ et que la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ converge.

4. Rappeler et démontrer le lien qu'il y a entre les coefficients de Fourier complexes d'une fonction de classe C^1 et ceux de sa dérivée.

Si f est une fonction T-périodique de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, on a $c_n(f') = \frac{1}{T}\int_0^T f'(x)e^{-in\omega x}dx$, où $\omega = \frac{2\pi}{T}$. On peut alors intégrer par parties, ce qui donne

$$c_n(f') = \frac{1}{T}\left[f(x)e^{-in\omega x}\right]_0^T - \frac{1}{T}\int_0^T -in\omega f(x)e^{-in\omega x}dx$$

Or, le terme $\left[f(x)e^{-in\omega x}\right]_0^T$ est nul puisque la fonction $x \mapsto f(x)e^{-in\omega x}$ est T-périodique. Et en mettant en facteur le coefficient $in\omega$, on reconnait le coefficient de Fourier de f :

$$c_n(f') = in\omega c_n(f)$$

Exercice 2

Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ dans les cas suivantes.

1. $a_n = \dfrac{3^n}{n!}$

   En utilisant la règle de d'Alembert, on a $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{3}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, donc le rayon de convergence est $1/0 = +\infty$.

2. $a_n = n2^n$

   De la même façon, on a $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{2(n+1)}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$, donc le rayon de convergence est $1/1 = 1$.

3. $a_n = 1 - \dfrac{1}{1+2^n}$

   On a $a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$, d'où $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$, et donc le rayon de convergence est 1.

Calculer la somme de la série entière dans les deux premiers cas.

Dans le premier cas, on reconnait l'exponentielle : la somme vaut e^{3x}.
Dans le deuxième cas, on fait apparaître une dérivé :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} n2^n x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} n2^n x^n = 2x \sum_{n=1}^{+\infty} n(2x)^{n-1} = x \left(\sum_{n=0}^{+\infty} (2x)^n \right)'$$

(valable à l'intérieur du disque de convergence). Or, on a $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (2x)^n = \frac{2x}{1-2x}$ (somme géométrique). Et donc la somme de la série entière dans le deuxième cas vaut $x\left(\dfrac{1}{1-2x}\right)' = \dfrac{2x}{(1-2x)^2}$.

Exercice 3

Soit f la fonction définie par $f(t) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(nt)}{n^2}$.

1. Quel est le domaine de définition I de la fonction f ?

   L'expression $\dfrac{\cos(nt)}{n^2}$ est bien définie pour tout réel t. Pour que $f(t)$ soit défini, il faut et il suffit que la série converge. On a la majoration $\left|\dfrac{\cos(nt)}{n^2}\right| \leq \dfrac{1}{n^2}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, or la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ converge (série de Riemann d'exposant $2 > 1$). La série de fonctions définissant f converge donc normalement sur $\mathbb{R}$. Elle converge donc aussi uniformément et simplement sur $\mathbb{R}$. Ainsi f est définie sur $I = \mathbb{R}$.

2. Montrer que la série définissant f converge uniformément sur I.

   Nous avons montré à la question précédente la convergence normale de cette série sur $\mathbb{R}$. Cela entraîne sa convergence uniforme sur $\mathbb{R}$.

3. Vérifier que la fonction f est 2π-périodique et paire.

   f est 2π-périodique et paire comme somme (infinie) de fonctions 2π-périodiques paires.

4. La fonction f est-elle continue ?

   Les fonctions $t \mapsto \frac{\cos(nt)}{n^2}$ sont toutes continues sur $\mathbb{R}$, et la série définissant f converge uniformément. D'après le théorème de continuité de la somme, la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$.

5. Vérifier que les coefficients de Fourier de f valent $a_n(f) = \dfrac{1}{n^2}$ et $b_n(f) = 0$ pour tout $n \geq 1$ et $a_0(f) = 0$.

La fonction f étant paire, les coefficients $b_n(f)$ sont tous nuls. Calculons $a_n(f)$ pour $n \geq 1$.

$$a_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t)\cos(nt)dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\cos(kt)}{k^2} \cos(nt)dt.$$

Or, on sait que la série définissant f converge uniformément sur $\mathbb{R}$ (donc sur $[0, 2\pi]$). On peut donc intervertir l'intégrale et la somme :

$$a_n(f) = \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \int_0^{2\pi} \cos(kt)\cos(nt)dt = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \int_0^{2\pi} \left(\cos((k+n)t) + \cos((k-n)t)\right) dt$$

Or, l'intégrale $\int_0^{2\pi} \cos(pt)dt$ vaut $\left[\frac{\sin(pt)}{p}\right]_0^{2\pi} = 0$ si $p \neq 0$ et vaut 2π si $p = 0$. L'intégrale $\displaystyle\int_0^{2\pi} \left(\cos((k+n)t) + \cos((k-n)t)\right) dt$ vaut donc 0 si $k \neq n$ et vaut 2π sinon. Ainsi, on trouve bien $a_n(f) = \dfrac{1}{n^2}$ pour $n \geq 1$. Pour $n = 0$, un calcul similaire donne $a_0(f) = 0$.

6. Exprimer l'intégrale $\displaystyle\int_0^{2\pi} (f(t))^2 dt$ en fonction de la somme $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}$.

Le théorème de Parseval nous donne l'égalité $\displaystyle\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (f(t))^2 dt = a_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} a_n^2 + b_n^2$. En utilisant la question précédente, cela donne

$$\int_0^{2\pi} ((f(t))^2 dt = \pi \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$$

7. Montrer que f est de classe C^1 sur les intervalles $[\epsilon, 2\pi - \epsilon]$ pour $\epsilon > 0$.

On souhaite utiliser le théorème de dérivabilité de la somme. Pour cela, on doit montrer la convergence uniforme de la série des dérivées. On a bien pour tout $n \geq 1$ que $t \mapsto \dfrac{\cos(nt)}{n^2}$ est de classe C^1, et $\left(\dfrac{\cos(nt)}{n^2}\right)' = \dfrac{-\sin(nt)}{n}$. Montrons que la série des dérivées $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{-\sin(nt)}{n}$ vérifie le critère d'Abel uniforme.

— La suite $(\frac{1}{n})_{n \geq 1}$ décroît et tend vers 0.

— Vérifions que la suite $\displaystyle\left(\sum_{n=1}^{N} \sin(nt)\right)_{N \geq 1}$ est uniformément bornée pour $t \in [\epsilon, 2\pi - \epsilon]$. On a $\displaystyle\left|\sum_{n=1}^{N} \sin(nt)\right| = \left|\mathrm{Im}\left(\sum_{n=1}^{N} e^{int}\right)\right| = \left|\mathrm{Im}\left(\frac{e^{it} - e^{i(N+1)t}}{1 - e^{it}}\right)\right| \leq \frac{2}{|1 - e^{it}|} = \frac{1}{\sin(t/2)}$ qui est bien borné quand t parcours $[\epsilon, 2\pi - \epsilon]$ pour un $\epsilon > 0$ fixé.

De plus, la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(nt)}{n^2}$ converge bien en au moins un point de $[\epsilon, 2\pi - \epsilon]$ puisqu'on a vu qu'elle convergeait même sur tout $\mathbb{R}$. Le théorème de dérivabilité de la somme s'applique donc sur l'intervalle $[\epsilon, 2\pi - \epsilon]$, et la fonction f est de classe C^1 sur cet intervalle.

8. Montrer que la fonction f restreinte à l'intervalle $[0, 2\pi]$ est un polynôme de degré 2 que l'on explicitera.

Soient a, b et c des réels, et soit g une fonction 2π-périodique paire telle que $g(x) = ax^2 + bx + c$ pour tout $x \in [0, 2\pi]$ et ayant les mêmes coefficients de Fourier que f. La fonction g étant 2π-périodique, on doit avoir $g(0) = g(2\pi)$, ce qui donne la relation $b = -2\pi a$. Le coefficient de Fourier $a_0(g)$ étant nul, on doit avoir $\displaystyle\int_0^{2\pi} (ax^2 + bx + c)dx = 0$, ce qui donne la relation $\dfrac{(2\pi)^3 a}{3} + \dfrac{(2\pi)^2 b}{2} + 2\pi c = 0$. Pour $n \geq 1$, on a

$$\begin{aligned}
a_n(g) &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} (ax^2 + bx + c)\cos(nx)dx \\
&= \frac{1}{\pi}\left[(ax^2 + bx + c)\frac{\sin(nx)}{n}\right]_0^{2\pi} - \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} (2ax + b)\frac{\sin(nx)}{n}dx \\
&= 0 - \frac{1}{\pi}\left(\left[(2ax + b)\frac{-\cos(nx)}{n^2}\right]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} 2a\frac{-\cos(nx)}{n^2}dx\right) \\
&= \frac{4a}{n^2} - 0
\end{aligned}$$

En prenant $a = \frac{1}{4}$, $b = -2\pi a = \frac{-\pi}{2}$ et $c = \frac{-1}{2\pi}\left(\frac{(2\pi)^3 a}{3} + \frac{(2\pi)^2 b}{2}\right) = \frac{\pi^2}{6}$, la fonction g a bien les mêmes coefficients de Fourier que f et a bien toutes les propriétés souhaitées. Montrons que $g = f$. La série de Fourier de g est la série définissant f. Or, on a vu à la question 2 que cette série converge uniformément sur $\mathbb{R}$. Il est connu que dans ce cas la convergence a nécessairement lieu vers la fonction g, d'où $f = g$.

9. En déduire la somme $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

On a $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = f(0)$. Or, d'après la question précédente on a $f(0) = \dfrac{\pi^2}{6}$.

10. Calculer la somme $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}$.

D'après la question 6 on a

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} (f(t))^2 dt.$$

Or, d'après la question 8 on a

$$\int_0^{2\pi} (f(t))^2 dt = \int_0^{2\pi} \left(\frac{t^2}{4} - \frac{t\pi}{2} + \frac{\pi^2}{6}\right)^2 dt.$$

Après calcul, on trouve

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$