Développements en séries entières usuels

Il y a trois développements en séries entières très importants (ceux encadrés), et à partir desquels on peut retrouver les développements de nombreuses fonctions usuelles.

L'exponentielle

L'exponentielle est une des séries entières les plus importantes. On peut retrouver son développement avec la formule

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n$$

pour toute fonction f développable en série entière, où $f^{(n)}$ est la dérivée n-ième de f. Sachant que la dérivée n-ième de l'exponentielle est elle-même et que sa valeur en 0 est $e^0 = 1$, on a donc

$$\boxed{e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} \qquad \text{pour tout } z \in \mathbb{C}.}$$

On définit alors $\cos(z) = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$ et $\sin(z) = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$, ce qui permet d'avoir les développements

$$\cos(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!} \qquad \text{et} \qquad \sin(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad \text{pour tout } z \in \mathbb{C}.$$

On définit aussi $\mathrm{ch}(z) = \frac{e^z+e^{-z}}{2}$ et $\mathrm{sh}(z) = \frac{e^z-e^{-z}}{2}$, ce qui permet d'avoir les développements

$$\mathrm{ch}(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{sh}(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad \text{pour tout } z \in \mathbb{C}.$$

Série géométrique

Le développement le plus simple est le suivant :

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \frac{1}{1-z} \qquad \text{pour } |z| < 1.}$$

Il découle de la formule donnant la somme d'une série géométrique. En remplaçant z par $-z$, on a aussi le développement

$$\frac{1}{1+z} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n z^n \qquad \text{pour } |z| < 1$$

En intégrant termes à termes et en ajustant le terme constant, on obtient les développements

$$\ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} \qquad \text{et} \qquad \ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n} \qquad \text{pour } |x| < 1.$$

En posant $z = x^2$ à partir des développements en séries entières de $\frac{1}{1-z}$ et de $\frac{1}{1+z}$, on a :

$$\frac{1}{1-x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^{2n} \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{2n} \qquad \text{pour } |x| < 1,$$

ce qui donne après intégration termes à termes :

$$\mathrm{argth}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \qquad \text{et} \qquad \arctan(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} \qquad \text{pour } |x| < 1.$$

Formule du binôme

La formule suivante généralise la formule du binôme de Newton :

$$\boxed{(1+z)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} z^n \quad \text{pour } |z|<1 \text{ et } \alpha\in\mathbb{R}, \quad \text{où} \quad \binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)...(\alpha-(n-1))}{n!}.}$$

Les premiers termes de ce développement sont donnés par

$$(1+x)^\alpha = 1+\alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{6}x^3 + \underset{x\to 0}{O}(x^4)$$

En particulier, pour $\alpha = -\frac{1}{2}$ et $z=\pm x^2$, on obtient

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}x^{2n} \quad \text{et} \quad \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}x^{2n} \quad \text{pour } |x|<1.$$

En intégrant, il vient

$$\arcsin(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2(2n+1)}x^{2n+1}, \quad \arccos(x) = \frac{\pi}{2} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2(2n+1)}x^{2n+1}$$

$$\text{et} \quad \operatorname{argsh}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n(2n)!}{2^{2n}(n!)^2(2n+1)}x^{2n+1} \quad \text{pour } |x|<1.$$

Récapitulatif partiel

fonction	développement en série entière	validité
e^z	$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} = 1+z+\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{6}+\frac{z^4}{24}+...$	$z\in\mathbb{C}$
$\cos(z)$	$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!} = 1-\frac{z^2}{2}+\frac{z^4}{24}-\frac{z^6}{720}+...$	$z\in\mathbb{C}$
$\sin(z)$	$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!} = z-\frac{z^3}{6}+\frac{z^5}{120}-\frac{z^7}{5040}+...$	$z\in\mathbb{C}$
$\operatorname{ch}(z)$	$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!} = 1+\frac{z^2}{2}+\frac{z^4}{24}+\frac{z^6}{720}+...$	$z\in\mathbb{C}$
$\operatorname{sh}(z)$	$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = z+\frac{z^3}{6}+\frac{z^5}{120}+\frac{z^7}{5040}+...$	$z\in\mathbb{C}$
$\frac{1}{1-z}$	$\sum_{n=0}^{+\infty} z^n = 1+z+z^2+z^3+z^4+z^5+...$	$\|z\|<1$
$\frac{1}{1+z}$	$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n z^n = 1-z+z^2-z^3+z^4-z^5+...$	$\|z\|<1$
$\ln(1-x)$	$-\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = -x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}-...$	$x\in[-1,1[$
$\ln(1+x)$	$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}x^n}{n} = x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+...$	$x\in]-1,1]$
$\operatorname{argth}(x)$	$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\frac{x^7}{7}+...$	$x\in]-1,1[$
$\arctan(x)$	$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} = x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+...$	$x\in[-1,1]$