Année universitaire 2015-2016

Site : ☐Luminy ☐St-Charles ☒St-Jérôme ☐Cht-Gombert ☐Aix-Montperrin ☐Aubagne-Satis

Sujet session : ☒1er semestre - ☐2ème semestre - ☐Session 2 Durée de l'épreuve : 2h

Examen de : ☐L1 / ☒L2 / ☐L3 - ☐M1 / ☐M2 - ☐LP - ☐DU Nom diplôme : MPCI

Code Apogée du module : SMP3U1J Libellé du module : Analyse 2

Document autorisé : ☐OUI - ☒NON Calculatrices autorisées : ☐OUI - ☒NON

Le barème est à titre indicatif et est susceptible de changer.

Les exercices sont indépendants et peuvent être traités dans le désordre. Vous pouvez sauter des questions sans les démontrer, mais admettre le résultat pour l'utiliser par la suite.

Examen d'Analyse 2 du 11 janvier 2016

Exercice 1 (cours, 9 pts)

1. Montrer que le terme général d'une série convergente tend vers 0. La réciproque est-elle vraie ? Justifier.
2. Montrer que la convergence normale d'une série de fonctions entraîne sa convergence uniforme.
3. Qu'est-ce qu'une série de Fourier ?
4. Montrer que la série de Fourier d'une fonction périodique de classe C^2 converge normalement. (Indication : On pourra commencer par montrer que $c_n(f) = \underset{n \to +\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)$.)

Exercice 2 (3 pts)

Déterminer la nature des séries suivantes.

1. $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n \ln(n)$
2. $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cos(n)}{2^n}$
3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} x^n \cos(nx), \quad x \in \mathbb{R}$

Exercice 3 (4 pts)

Déterminer si la suite de fonction $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement et uniformément sur I dans les cas suivants.

1. $f_n(x) = \dfrac{x}{1 + x^{2n}}, \quad I = \mathbb{R}.$
2. $f_n(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{x^{2k}}{k(1 + kx^{2k})}, \quad I = \mathbb{R}.$

Exercice 4 (8 pts)

Soit la fonction

$$f(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{n(n-1)}.$$

1. Quel est le rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{n(n-1)}$?
2. Quel est le domaine de définition I de la fonction f ?
3. Calculer $f(1)$. (Indication : on pourra reconnaître une série téléscopique.)
4. Montrer que la fonction f est continue sur l'intervalle $[-1, 1]$.
5. Montrer que la fonction f est-elle dérivable sur $]-1, 1[$ et exprimer la dérivée f' à l'aide de fonctions usuelles sur $]-1, 1[$.
6. En déduire l'expression de la dérivée f' à l'aide de fonctions usuelles sur $]-1, 1[$.
7. En déduire l'expression de f à l'aide de fonctions usuelles sur $]-1, 1[$.
8. (Facultatif) Calculer la somme $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)}{n(n-1)}$.