Corrigé de l'examen du 11 janvier 2016

Exercice 1 (cours, 9 pts)

1. Montrer que le terme général d'une série convergente tend vers 0. La réciproque est-elle vraie ? Justifier.

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ le terme général d'une série convergente, et soit $S_N = \sum_{n=0}^{N} a_n$ la suite de ses sommes partielles. La suite S_N converge vers une limite l par hypothèse. On a alors pour tout $N \geq 1$,

$$a_N = S_N - S_{N-1} \xrightarrow[N\to+\infty]{} l - l = 0.$$

La réciproque est fausse puisque l'on a $\frac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et pourtant la série harmonique $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ diverge.

2. Montrer que la convergence normale d'une série de fonctions entraîne sa convergence uniforme.

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ le terme général d'une série qui converge normalement sur I, c'est-à-dire tel que la série

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \sup\{|f_n(x)|\,|x \in I\}$$

converge. Montrons que la série de terme général $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie le critère de Cauchy uniforme (qui est équivalent à la convergence uniforme de la série). Pour tous $x \in I$, p et $q \in \mathbb{N}$, on a

$$\left|\sum_{n=p}^{q} f_n(x)\right| \leq \sum_{n=p}^{q} |f_n(x)| \leq \sum_{n=p}^{q} \sup\{|f_n(x)|\,|x \in I\}.$$

Or, en utilisant le critère de Cauchy pour la série convergente $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \sup\{|f_n(x)|\,|x \in I\}$, on a

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tq } \forall q \geq p \geq n_0, \sum_{n=p}^{q} \sup\{|f_n(x)|\,|x \in I\} \leq \epsilon.$$

On en déduit donc que

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tq } \forall q \geq p \geq n_0, \left|\sum_{n=p}^{q} f_n(x)\right| \leq \epsilon,$$

et donc la série vérifie bien le critère de Cauchy uniforme, donc converge uniformément.

3. Qu'est-ce qu'une série de Fourier ?

La série de Fourier d'une fonction f T-périodique et continue par morceaux est la série de fonctions

$$a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{in\omega t} \quad \text{où } \omega = \frac{2\pi}{T} \text{ et}$$

$$a_0(f) = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt, \quad \forall n \geq 1,\ a_n(f) = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(n\omega t)dt,$$

$$b_n(f) = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin(n\omega t)dt, \quad c_n(f) = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{-in\omega t}dt.$$

4. Montrer que la série de Fourier d'une fonction périodique de classe C^2 converge normalement. (Indication : On pourra commencer par montrer que $c_n(f) = \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)$.)

Soit f une fonction périodique de classe C^2. On a alors

$$c_n(f) = \frac{1}{in}c_n(f') = \frac{-1}{n^2}c_n(f'').$$

Or, la fonction f'' étant périodique et continue, le lemme de Riemann-Lebesgue donne que $c_n(f'') \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. On a donc $c_n(f) = \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)$, et par théorème de comparaison des séries à termes positifs, la convergence de la série de Riemann $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$ entraîne la convergence de la série de terme général $|c_n(f)|$. Or, on a l'égalité

$$\left|c_n(f)e^{in\omega t}\right| = |c_n(f)|$$

avec $|c_n(f)|$ qui est indépendant de t et qui est le terme général d'une série convergente d'après ci-avant. Ainsi, on a bien montré la convergence normale de la série de Fourier.

Exercice 2 (3 pts)

Déterminer la nature des séries suivantes.

1. $\sum_{n=2}^{+\infty}(-1)^n\ln(n)$

Le terme général $(-1)^n\ln(n)$ ne tend pas vers 0 quand n tend vers l'infini, donc la série diverge.

2. $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\cos(n)}{2^n}$

On a la majoration

$$\left|\frac{\cos(n)}{2^n}\right| \leq \frac{1}{2^n},$$

et $\frac{1}{2^n}$ est le terme général positif d'une série géométrique de raison $\frac{1}{2} \in]-1,1[$ qui est donc convergente. Par théorème de comparaison, la série $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\cos(n)}{2^n}$ est absolument convergente donc convergente.

3. $\sum_{n=1}^{+\infty}x^n\cos(nx), \quad x \in \mathbb{R}$

Pour $|x| \geq 1$, le terme général $x^n\cos(nx)$ ne tend pas vers 0 donc la série diverge. Pour $|x| < 1$, on a la majoration $|x^n\cos(nx)| \leq |x|^n$. Or, $|x|^n$ est le terme général positif d'une série géométrique convergente. Par théorème de comparaison, la série de terme général $x^n\cos(nx)$ converge absolument donc converge. Ainsi, la série converge si et seulement si $|x| < 1$.

Exercice 3 (4 pts)

Déterminer si la suite de fonction $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement et uniformément sur I dans les cas suivants.

1. $f_n(x) = \dfrac{x}{1+x^{2n}}, \quad I = \mathbb{R}.$

Pour $|x| < 1$, on a $x^{2n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, donc $f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} x$. Pour $|x| > 1$, on a $x^{2n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$, donc $f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Pour $|x| = 1$, on a $x^{2n} = 1$, donc $f_n(x) = \frac{x}{2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{x}{2}$. Ainsi, la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction f définie par

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in]-1,1[\\ 1/2 & \text{si } x = 1 \\ -1/2 & \text{si } x = -1 \\ 0 & \text{si } x \in \,]-\infty,-1[\,\cup\,]1,+\infty[. \end{cases}$$

La convergence n'est pas uniforme puisque la limite f n'est pas continue en 1 alors que les fonctions f_n sont toutes continues sur $\mathbb{R}$.

2. $f_n(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{x^{2k}}{k(1+kx^{2k})}, \quad I = \mathbb{R}.$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a la majoration

$$\left|\frac{x^{2k}}{k(1+kx^{2k})}\right| = \frac{x^{2k}}{k(1+kx^{2k})} \leq \frac{x^{2k}}{k^2x^{2k}} = \frac{1}{k^2}.$$

Or, $\left(\frac{1}{k^2}\right)_{k\geq 1}$ est le terme général d'une série convergente et est indépendant de x. Ainsi, la série de terme général $\frac{x^{2k}}{k(1+kx^{2k})}$ converge normalement donc uniformément et simplement sur $\mathbb{R}$.

Exercice 4 (8 pts)

Soit la fonction

$$f(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{n(n-1)}.$$

1. Quel est le rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{n(n-1)}$?

Utilisons la règle de Hadamard. On a

$$\frac{\frac{1}{(n+1)n}}{\frac{1}{n(n-1)}} = \frac{n-1}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1.$$

Le rayon de convergence est donc $1/1 = 1$.

2. Quel est le domaine de définition I de la fonction f ?

La série entière dont f est la somme a pour rayon de convergence 1, donc la somme existe pour $|x| < 1$ et n'existe pas pour $|x| > 1$. Il reste à déterminer si la somme converge pour $|x| = 1$. On a $\left|\dfrac{x^n}{n(n-1)}\right| = \dfrac{|x|^n}{n(n-1)} = \dfrac{1}{n(n-1)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^2}$, or $\dfrac{1}{n^2}$ est le terme général positif d'une série de Riemann convergente. Par théorème de comparaison, la série de terme général $\left|\dfrac{x^n}{n(n-1)}\right|$ converge absolument donc converge. Ainsi, le domaine de définition de f est l'intervalle $[-1,1]$.

3. Calculer $f(1)$. (Indication : on pourra reconnaître une série téléscopique.)

$$f(1) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(n-1)} = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} = \frac{1}{2-1} - \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 1.$$

4. Montrer que la fonction f est continue sur l'intervalle $[-1,1]$.

Pour tout $x \in [-1,1]$, on a l'inégalité

$$\left|\frac{x^n}{n(n-1)}\right| \leq \frac{1}{n(n-1)}$$

et $\frac{1}{n(n-1)}$ est indépendant de x et est le terme général d'une série convergente. Ainsi, la série de terme général $\dfrac{x^n}{n(n-1)}$ converge normalement (et donc aussi uniformément) sur $[-1,1]$. Par théorème de continuité de la somme, les fonctions $x \mapsto \frac{x^n}{n(n-1)}$ étant toutes continues sur $[-1,1]$, on obtient la continuité de la fonction f sur $[-1,1]$.

5. Montrer que la fonction f est-elle dérivable sur $]-1,1[$ et exprimer la dérivée f' à l'aide de fonctions usuelles sur $]-1,1[$.

D'après la première question, le disque ouvert de convergence de la série entière restreint aux réels est $]-1,1[$. On sait qu'une série entière est de classe C^∞ (donc en particulier dérivable) dans le disque ouvert de convergence, et que l'on peut dériver terme à terme. La fonction f est donc dérivable sur $]-1,1[$, et on a pour tout $x \in]-1,1[$,

$$f'(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{n-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}.$$

6. En déduire l'expression de la dérivée f' à l'aide de fonctions usuelles sur $]-1,1[$.

On reconnaît un développement en série entière usuel :

$$f'(x) = -\ln(1-x)$$

(On peut retrouver ce développement en dérivant à nouveau : on obtient alors une série géométrique que l'on peut calculer, puis on intègre.)

7. En déduire l'expression de f à l'aide de fonctions usuelles sur $]-1,1[$.

On a $f(0) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{0}{n(n-1)} = 0$, donc $f(x) = \int_0^x f'(t)dt$. Une intégration par parties (en posant $u'(t) = -1$, $v(t) = \ln(1-t)$, $u(t) = 1-t$, $v'(t) = \frac{1}{t-1}$) donne :

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^x -\ln(1-t)dt \\ &= [(1-t)\ln(1-t)]_0^x - \int_0^x \frac{1-t}{t-1}dt \\ &= (1-x)\ln(1-x) + x. \end{aligned}$$

8. (Facultatif) Calculer la somme $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)}{n(n-1)}$.

D'après la question 4 la fonction f est continue en -1, donc on a

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n(n-1)} = f(-1) = \lim_{\substack{x\to -1\\ x>-1}} f(x) = \lim_{\substack{x\to -1\\ x>-1}} (1-x)\ln(1-x) + x = 2\ln(2) - 1.$$