Année universitaire 2015-2016

Site : ☐Luminy ☐St-Charles ☒St-Jérôme ☐Cht-Gombert ☐Aix-Montperrin ☐Aubagne-Satis
Sujet session : ☒1er semestre - ☐2ème semestre - ☐Session 2 Durée de l'épreuve : 2h
Examen de : ☐L1 / ☒L2 / ☐L3 - ☐M1 / ☐M2 - ☐LP - ☐DU Nom diplôme : MPCI
Code Apogée du module : SMP3U1J Libellé du module : Analyse 2
Document autorisé : ☐OUI - ☒NON Calculatrices autorisées : ☐OUI - ☒NON

Les exercices sont indépendants et peuvent être traités dans le désordre. Vous pouvez sauter des questions sans les démontrer, mais admettre le résultat pour l'utiliser par la suite.

ATTENTION : l'énoncé du sujet contient 2 pages.

Exercice 1 (cours)

1. Rappeler la définition du petit o : c'est-à-dire que pour deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, définir ce que signifie l'égalité $a_n \underset{n\to\infty}{=} o\,(b_n)$.
2. Rappelez l'énoncé du théorème de comparaison avec un petit o.
3. Rappeler le théorème sur le produit de Cauchy de deux séries.
4. Rappeler ce qu'est le critère de Cauchy uniforme pour une suite de fonctions.

Exercice 2

Déterminer la nature des séries suivantes.

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1+(-1)^n}{\cos(n)}$
2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \sin\left(\frac{1}{n^2}\right)$
3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n^2 \ln\left(\cos\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$

Exercice 3

Le but de cet exercice est de montrer le résultat suivant ainsi que des corollaires.

Proposition:
Soit $(a_n)_{n\geq 1}$ *une suite positive décroissante et soit* $b_n = 2^n a_{2^n}, \forall n \in \mathbb{N}$. *Alors les séries de termes généraux* $(a_n)_{n\geq 1}$ *et* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *sont de même nature.*

1. Donner un encadrement de $\displaystyle\sum_{n=2^{N-1}}^{2^N-1} a_n$ en fonction de b_N et b_{N-1}, pour tout $N \geq 1$.
2. En sommant l'encadrement précédent, en déduire l'encadrement

$$\frac{1}{2}\left(S_N(b) - b_0\right) \leq S_{2^N-1}(a) \leq S_{N-1}(b), \quad \forall N \geq 1$$

   où $S_N(a) = \displaystyle\sum_{n=1}^{N} a_n$ et $S_N(b) = \displaystyle\sum_{n=0}^{N} b_n$ sont les sommes partielles des séries $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ respectivement.
3. Que peut-on dire de la monotonie des suites $(S_n(a))_{n\geq 1}$ et $(S_n(b))_{n\in\mathbb{N}}$?
4. Démontrer la proposition.
5. Démontrer le critère sur les séries de Riemann en utilisant la proposition.
6. On appelle <u>séries de Bertrand</u> les séries de la forme

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$$

   où α et β sont des réels quelconques.
   En utilisant la proposition, déterminer la nature des séries de Bertrand.

Exercice 4

Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ une suite de réels strictement positifs qui est le terme général d'une série convergente et soit $R_N = \displaystyle\sum_{n=N}^{+\infty} u_n$. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{u_n}{R_n}$ diverge.