Exercice 1 (cours, 4 pts)

Exercice 2 (5 pts)

Déterminer la nature des séries suivantes.

1. $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} n \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right)$

On a $n\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right) \underset{n\to\infty}{\sim} (-1)^n \not\xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Le terme général ne tend pas vers 0 donc la série diverge.

2. $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 + n(-1)^n}$

On a $\left|\frac{(-1)^n}{n^2+n(-1)^n}\right| = \frac{1}{n^2+n(-1)^n} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$. Or, $\frac{1}{n^2}$ est le terme général d'une série de Riemann convergente. Par théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+n(-1)^n}$ converge absolument. Elle converge donc.

3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}}{2^n} x^n \quad$ pour $x \in \mathbb{R}$.

Appliquons la règle de Cauchy. On a $\left|\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}}{2^n}x^n\right|^{1/n} = \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{2}|x| = \frac{e^{n\ln(1+\frac{1}{n})}}{2}|x| \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{e}{2}|x|$.
Pour $\frac{e}{2}|x| < 1$ la série converge absolument d'après la règle de Cauchy, et pour $\frac{e}{2}|x| > 1$ la série diverge. Il reste à étudier le cas $\frac{e}{2}|x| = 1$. Dans ce cas, on a

$$\left|\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}}{2^n}x^n\right| = e^{n^2\ln(1+\frac{1}{n})}e^{-n} = e^{n(n\ln(1+\frac{1}{n})-1)} = e^{n\left(\frac{-1}{2n}+\underset{n\to\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)} = e^{-\frac{1}{2}+\underset{n\to\infty}{o}(1)} \xrightarrow[n\to\infty]{} e^{-\frac{1}{2}} \neq 0,$$

donc la série diverge, sont terme général ne tendant pas vers 0. En conclusion, la série converge si et seulement si $|x| < \frac{2}{e}$.

Exercice 3 (5 pts)

Etudiez la convergence uniforme de la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 1}$ dans les cas suivants.

1. $f_n(x) = n\ln(1+\frac{x}{n})$ pour $x \in [0,1]$,

Pour $x \in [0,1]$ fixé, on a $\lim_{n\to\infty} n\ln(1+\frac{x}{n}) = x$. Ainsi, la suite $f_n(x)$ converge simplement vers la fonction $f(x) = x$. Majorons $|f_n(x) - f(x)|$ uniformément. Pour $x \in [0,1]$, on a $f_n(x) - f(x) = n\ln\left(1+\frac{x}{n}\right) - x$, donc $(f_n(x) - f(x))' = \frac{1}{1+\frac{x}{n}} - 1 = \frac{-x/n}{1+x/n} \leq 0$. La fonction $x \mapsto f_n(x) - f(x)$ est donc décroissante sur $[0,1]$ et on a donc

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \max\left(f_n(0) - f(0), f(1) - f_n(1)\right).$$

Or, on a $f_n(0) - f(0) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ et $f(1) - f_n(1) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ par convergence simple, et de plus $\max\left(f_n(0) - f(0), f(1) - f_n(1)\right)$ est un majorant indépendant de $x \in [0,1]$. Ainsi, on a bien montré que la convergence est uniforme.

2. $f_n(x) = \frac{x}{n}e^{-nx^2}$ pour $x \in \mathbb{R}$.

Les croissances comparées donnent que la suite f_n converge simplement vers 0. Pour n fixé, on a $f_n'(x) = \frac{1}{n}e^{-nx^2} - 2xn\frac{x}{n}e^{-nx^2} = \left(\frac{1}{n} - 2x^2\right)e^{-nx^2}$. Et on a

$$\left(\frac{1}{n} - 2x^2\right)e^{-nx^2} \geq 0 \Longleftrightarrow \frac{1}{n} - 2x^2 \geq 0 \Longleftrightarrow -\frac{1}{\sqrt{2n}} \leq x \leq \frac{1}{\sqrt{2n}}.$$

La fonction f_n est donc croissante sur l'intervalle $[-\frac{1}{\sqrt{2n}}, \frac{1}{\sqrt{2n}}]$ et elle est décroissante sur chacun des intervalles $]-\infty, \frac{1}{2n}]$ et $[\frac{1}{2n}, +\infty[$ (mais pas sur l'union des deux !). Il suffit donc d'étudier les valeurs de f_n aux bornes de ces intervalles pour calculer $\sup\{|f_n(x)|\,|x \in \mathbb{R}\}$. Or, on a

$$\lim_{x\to-\infty} f_n(x) = \lim_{x\to+\infty} f_n(x) = 0$$

par croissances comparées, et on a

$$\left|f_n\left(-\frac{1}{\sqrt{2n}}\right)\right| = \left|f_n\left(\frac{1}{\sqrt{2n}}\right)\right| = \frac{1}{n\sqrt{2n}}e^{-\frac{1}{2}}.$$

On a donc

$$\sup\{|f_n(x)|\,|x \in \mathbb{R}\} = \max(0, \frac{1}{n\sqrt{2n}}e^{-\frac{1}{2}}) = \frac{1}{n\sqrt{2n}}e^{-\frac{1}{2}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

d'où la convergence uniforme de la suite.

Calculez $\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{x}{n}e^{-nx^2}dx$.

La suite de fonctions $x \mapsto \frac{x}{n}e^{-nx^2}$ étant uniformément convergente sur $[0, 1]$ puisque sur $\mathbb{R}$ d'après la question précédente, on peut appliquer le théorème d'intervertion limite-intégrale, ce qui donne

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{x}{n}e^{-nx^2}dx = \int_0^1 \lim_{n\to+\infty} \frac{x}{n}e^{-nx^2}dx = \int_0^1 0dx = 0.$$

Exercice 4 (14 pts)

Pour $x \in \mathbb{R}$ posons

$$f(x) = \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=1}^{N} \frac{x^n}{n^2(1 + x^{2n})}.$$

1. Montrez que le domaine de définition de la fonction f est $\mathbb{R}$.

L'expression $\frac{x^n}{n^2(1+x^{2n})}$ est bien définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $n \geq 1$. Montrons que pour tout $x \in \mathbb{R}$, la limite existe et est réelle (autrement dit, montrons que la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2(1+x^{2n})}$ converge). Pour $|x| \leq 1$, on a

$$\left|\frac{x^n}{n^2(1 + x^{2n})}\right| \leq \frac{|x|^n}{n^2} \leq \frac{1}{n^2} \quad \text{puisque } x^{2n} \geq 0,$$

et pour $|x| > 1$, on a aussi

$$\left|\frac{x^n}{n^2(1 + x^{2n})}\right| \leq \frac{|x|^n}{n^2\,|x|^{2n}} = \frac{1}{n^2\,|x|^n} \leq \frac{1}{n^2}.$$

Or, $\frac{1}{n^2}$ est le terme général d'une série de Riemann convergente. Par théorème de comparaison, la série de terme général $\left(\frac{x^n}{n^2(1+x^{2n})}\right)_{n\geq1}$ converge absolument, donc converge. Donc $f(x)$ est défini quelque soit le réel $x \in \mathbb{R}$.

2. Montrez que la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$.

On a démontré à la question précédente que l'on a pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\left|\frac{x^n}{n^2(1+x^{2n})}\right| \leq \frac{1}{n^2}$. Or, $\frac{1}{n^2}$ est indépendant de x et est le terme général d'une série convergente. Ainsi, la série de terme général $\left(\frac{x^n}{n^2(1+x^{2n})}\right)_{n\geq 1}$ converge normalement, donc uniformément sur $\mathbb{R}$.
De plus, les fonctions $x \mapsto \frac{x^n}{n^2(1+x^{2n})}$ sont toutes continues sur $\mathbb{R}$ (ce sont des fractions rationnelles définies sur $\mathbb{R}$). On peut donc appliquer le théorème de continuité de la somme et on en déduit la continuité de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

3. Calculez $f(0)$, $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

$$f(0) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{0^n}{n^2(1+0^{2n})} = \sum_{n=1}^{+\infty} 0 = 0.$$

On a montré à la question précédente que la série de terme général $\left(\frac{x^n}{n^2(1+x^{2n})}\right)_{n\geq 1}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$. On peut donc utiliser le théorème d'intervertion limite-somme, ce qui donne

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \lim_{n\to+\infty} \frac{x^n}{n^2(1+x^{2n})} = \sum_{n=1}^{+\infty} 0 = 0,$$

et de même

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \lim_{n\to-\infty} \frac{x^n}{n^2(1+x^{2n})} = \sum_{n=1}^{+\infty} 0 = 0.$$

4. Montrez que la fonction f est dérivable sur les intervalles $]-1,1[$, $]1,\infty[$ et $]-\infty,-1[$, et montrez que la dérivée est dans chaque cas la somme d'une série de fonctions que l'on déterminera.

On souhaite appliquer le théorème de dérivation de la somme. Pour cela, il faut démontrer la convergence uniforme de la série des dérivées. On a

$$\left(\frac{x^n}{n^2(1+x^{2n})}\right)' = \frac{x^{n-1}}{n(1+x^{2n})} - \frac{2x^{2n-1}x^n}{n(1+x^{2n})^2} = \frac{(1+x^{2n})x^{n-1} - 2x^{2n-1}x^n}{n(1+x^{2n})^2} = \frac{x^{n-1}(1-x^{2n})}{n(1+x^{2n})^2}.$$

Donc pour tout $x \in [a,b] \subset]-1,1[$ on a

$$\left|\left(\frac{x^n}{n^2(1+x^{2n})}\right)'\right| \leq \frac{|x|^{n-1}(1+|x|^{2n})}{n(1-|x|^{2n})^2} \leq \frac{2\,|x|^{n-1}}{(1-|x|^{2n})^2} \leq \frac{2\max(|a|,|b|)^n}{(1-\max(|a|,|b|))^2},$$

or, $\frac{2\max(|a|,|b|)^n}{(1-\max(|a|,|b|))^2}$ est le terme général d'une série géométrique convergente qui ne dépend pas de x, donc la série de terme général $\left(\left(\frac{x^n}{n^2(1+x^{2n})}\right)'\right)_{n\geq 1}$ converge normalement sur $[a,b] \subset]-1,1[$.
On peut donc appliquer le théorème de dérivation de la somme, et on obtient que la fonction f est dérivable sur $[a,b]$ et que pour tout $x \in [a,b]$

$$f'(x) = \sum_{n\geq 1} \frac{x^{n-1}(1-x^{2n})}{n(1+x^{2n})^2}.$$

Ceci étant vrai pour tout $[a,b] \subset]-1,1[$, c'est vrai aussi sur l'intervalle $]-1,1[$ puisque la dérivabilité et l'égalité précédente se vérifient pour chaque x (! mais on ne peut pas déduire de ce que l'on a fait la convergence uniforme de la série des dérivée sur $]-1,1[$!).

De façon similaire, on a pour tout $x \in [a, +\infty[\subset]1, +\infty[$

$$\left| \left(\frac{x^n}{n^2(1+x^{2n})} \right)' \right| \leq \frac{x^{n-1}(x^{2n}-1)}{n(x^{2n})^2} \leq \frac{1}{x^{n+1}} \leq \frac{1}{a^{n+1}}.$$

Et pour $x \in]-\infty, a] \subset]-\infty, -1[$, on a

$$\left| \left(\frac{x^n}{n^2(1+x^{2n})} \right)' \right| = \frac{|x|^{n-1}(x^{2n}-1)}{n(x^{2n}+1)^2} \leq \frac{|x|^{n-1} x^{2n}}{n(x^{2n})^2} \leq \frac{1}{x^{n+1}} \leq \frac{1}{a^{n+1}}.$$

Or, $\frac{1}{a^{n+1}}$ est le terme général d'une série géométrique convergente ne dépendant pas de x, donc la série des dérivées converge normalement sur les intervalles $[a, +\infty[\subset]1, +\infty[$ et sur les intervalles $]-\infty, a] \subset]-\infty, -1[$. De la même façon que précédemment, on en déduit donc la dérivabilité de f sur $]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$, et on a pour tout $x \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$,

$$f'(x) = \sum_{n\geq 1} \frac{x^{n-1}(1-x^{2n})}{n(1+x^{2n})^2}.$$

5. Tracez le tableau de variations de la fonction f.

Etudions les variations de f. En utilisant la question précédente, on peut déterminer le signe de la dérivée. Pour $x \geq 0$ et $x \neq 1$, le signe de $\frac{x^{n-1}(1-x^{2n})}{n(1+x^{2n})^2}$ est celui de $1 - x^{2n}$, donc négatif pour $x > 1$ et positif pour $x < 1$. La dérivée f' est donc positive sur l'intervalle $]0, 1[$, et négative sur l'intervalle $]1, +\infty[$. Ainsi f croît sur l'intervalle $]-\infty, 1]$ et décroît sur l'intervalle $[1, +\infty[$.
Étude sur l'intervalle $]-\infty, 0]$ à faire... (montrer que la dérivée est négative sur $]-\infty, -1[$ et positive sur $]-1, 0]$.

6. (Facultatif) Montrer que la fonction f est dérivable en 1.

Montrons au contraire que la fonction f n'est pas dérivable ! On a vu à la question précédente que la fonction f admettait un maximum en 1. Si la dérivée de f en 1 existait, elle devrait donc être nulle. Montrons que la dérivée à droite est strictement négative. Pour cela, écrivons le taux de variation

$$\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = ... = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{-(x^n - 1)^2}{2n^2(x-1)(x^{2n}+1)}$$

Majorons ce terme général en $x = 1 + 1/k$, pour n allant de k à $2k$, en utilisant les inégalités $\frac{1}{n} \geq \ln(1 + \frac{1}{n}) \geq \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} \geq \frac{1}{2n}$:

$$\frac{-((1+\frac{1}{k})^n - 1)^2}{\frac{2n^2}{k}((1+\frac{1}{k})^{2n}+1)} \leq \frac{-((1+\frac{1}{k})^k - 1)^2}{\frac{2(2k)^2}{k}((1+\frac{1}{k})^{4k}+1)} \leq \frac{-(e^{\frac{1}{2}} - 1)^2}{8k(e^4 - 1)}$$

On obtient donc

$$\frac{f(1+\frac{1}{k}) - f(1)}{1 + \frac{1}{k} - 1} \leq \sum_{n=k}^{2k} \frac{-((1+\frac{1}{k})^n - 1)^2}{\frac{2n^2}{k}((1+\frac{1}{k})^{2n}+1)} \leq \sum_{n=k}^{2k} \frac{-(e^{\frac{1}{2}} - 1)^2}{8k(e^4 - 1)} \leq \frac{-(e^{\frac{1}{2}} - 1)^2}{8(e^4 - 1)} < 0,$$

ce qui prouve que si la dérivée de f à droite en 1 existe, alors elle est strictement négative (car inférieure à $\frac{-(e^{\frac{1}{2}}-1)^2}{8(e^4-1)}$). Ainsi, f n'est pas dérivable en 1.