Séries de Fourier

Introduction

Les séries de Fourier sont des séries qui permettent dans certains cas d'exprimer une fonction f périodique comme la somme d'une série trigonométrique :

$$f(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{i\omega t} \quad \text{ou} \quad f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(n\omega t) + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin(n\omega t).$$

Quand la fonction f représente un son, une telle décomposition correspond à décrire les différentes notes qui compose le son. Les sinusoïdes correspondent en effet à des sons "purs", c'est-à-dire constitués d'une seule note.

Les séries de Fourier sont aussi très utiles en éléctronique par exemple, puisque cela permet de décrire et d'obtenir des informations sur un signal péridoque.

Définitions

On définit les **coefficients de Fourier complexes** d'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ qui est T-périodique, par :

$$c_n(f) = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{-in\omega t}dt,$$

pour $n \in \mathbb{Z}$, où $\omega = \frac{2\pi}{T}$.

Remarque 1 *L'intégrale entre 0 et T est aussi égale à l'intégrale entre $-T/2$ et $T/2$, puisque la fonction est T-périodique. Quand on cherchera à calculer les coefficients de Fourier, on choisira donc l'intervalle de longueur T sur lequel il sera le plus facile de calculer l'intégrale.*

Remarque 2 *Le coefficient $c_0(f)$ est la valeur moyenne de f.*

On définit les **coefficients de Fourier réels** d'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui est T-périodique, pour $n \geq 1$, par :

$$a_n(f) = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(n\omega t)dt \quad , \quad b_n(f) = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin(n\omega t)dt \quad , \quad a_0(f) = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt$$

où $\omega = \frac{2\pi}{T}$.

Remarque 3 *La remarque 1 est encore valable ici.*

Remarque 4 *Il existe deux définitions courantes pour $a_0(f)$: on peut le définir comme la valeur moyenne de f comme ici, mais d'autres considèrent que c'est le double, afin que la formule donnant $a_n(f)$ soit valable pour tout $n \geq 0$. Attention à ces différences dans la littérature !*

Exemple 1 *Si f est la fonction 1-périodique définie par $f(x) = x$ pour $x \in [0, 1[$, alors on vérifie que l'on a*

$$c_n(f) = \int_0^1 xe^{-2\pi inx}dx = \begin{cases} \frac{i}{2\pi n} & si\ n \neq 0, \\ 1/2 & si\ n = 0 \end{cases}$$

et donc la série de Fourier complexe de f est

$$S(f) = \sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \frac{ie^{2\pi nt}}{2\pi n} + \frac{1}{2}.$$

Principaux résultats

Théorème 1 (Parseval) *Si f est une fonction T-périodique et continue par morceaux, alors on a l'égalité*

$$\frac{1}{T}\int_0^T f^2(t)dt = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n(f)|^2 = (a_0(f))^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n(f))^2 + (b_n(f))^2$$

Exemple 2 *Pour l'exemple précédent, l'égalité de Parseval donne :*

$$\int_0^1 t^2 dt = \frac{1}{2^2} + 2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2\pi n)^2},$$

ce qui permet d'obtenir :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Remarque 5 *La quantité donnée dans le théorème de Parseval est le carré de la valeur efficace de f quand f représente un signal électrique.*

Théorème 2 (Dirichlet) *Si f est une fonction T-périodique et continue par morceaux, alors en tout point $x \in \mathbb{R}$ où f est continue, elle est somme de sa série de Fourier :*

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f)e^{n\omega x i} = a_0(f) + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n(f)\cos(n\omega x) + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n(f)\sin(n\omega x).$$

Et en un point x où f n'est pas continue, la somme vaut

$$\frac{\lim_{x-} f + \lim_{x+} f}{2}.$$

Exemple 3 *En reprenant l'exemple 1, la somme de la série de Fourier de f est la fonction $S(f)$ 1-périodique qui vaut $S(f)(0) = 1/2$ en 0 et $S(f)(x) = x$ pour $x \in]0,1[$.*

FIGURE 1 – La fonction $f(x) = x$ sur $[0, 1[$ prolongée par 1-périodicité (en rouge), et la somme des 20 premiers termes de sa série de Fourier (en bleu).