Aix-Marseille Université - Licence MPCI **Année 2015/2016**
Analyse 2 – Semestre 3 **Enseignant : P. Mercat**

TD 4 : Séries de Fourier

Exercice 1 : Développer en série de Fourier la fonction continue et 2π-périodique définie sur $]-\pi,\pi[$ par $f(x)=|x|$. En déduire les sommes $A=\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$ et $B=\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^4}$.

Exercice 2 : Développer en série de Fourier la fonction impaire et 2π-périodique définie sur $[0,\pi]$ par $f(x)=x(\pi-x)$. En déduire les sommes $A=\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}$ et $B=\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^6}$.

Exercice 3 : Soit f une fonction continue 2π-périodique. On suppose que la série de Fourier de f converge uniformément. Montrer que cette convergence a lieu vers la fonction f.

Exercice 4 : Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la fonction régularisée, 2π-périodique, impaire, constante égale à 1 sur $]0,\pi[$.

1. Calculer ses coefficients de Fourier trigonométriques.
2. Étudier la convergence simple et uniforme de la série de Fourier vers f.
3. En déduire les sommes
$$\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{(-1)^p}{2p+1} \quad \text{et} \quad \sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{(2p+1)^2}.$$
4. Calculer les sommes
$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}.$$

Exercice 5 : Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ l'application 2π-périodique, paire, telle que $\forall x\in[0,\pi],\ f(x)=x$.

1. Calculer la série de Fourier de f.
2. Étudier la convergence simple et uniforme de la série de Fourier de f.
3. Déterminer les sommes
$$\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(2k+1)^2} \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(2p+1)^4}.$$
4. En déduire les sommes
$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^4}.$$

Exercice 6 : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction 2π-périodique et k-lipschitzienne. Pour $n \in \mathbb{Z}$, on pose

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-int} dt.$$

1. Pour tout $h \in \mathbb{R}$, on définit la fonction $f_h : \mathbb{R} \to \mathbb{C}, x \mapsto f(x+h) - f(x)$. Calculer $c_n(f_h)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.
2. En déduire que
$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \sin^2\left(\frac{nh}{2}\right) |c_n(f)|^2 \leq \frac{(kh)^2}{4}.$$
3. En utilisant la concavité de la fonction sinus, montrer la convergence de la série $\sum_{n \in \mathbb{Z}} n^2 |c_n(f)|^2$.
4. Que peut-on en conclure ?

Exercice 7 :

1. Existe-t-il une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue telle que les coefficients de Fourier soient : $a_n = \frac{1}{2^n}$ et $b_n = 0$?
2. Application : calculer $\int_{t=0}^{\pi} \frac{dt}{5 - 4\cos t}$.

Exercice 8 : Soit $a > 0$.

1. Développer en série entière : $f(x) = \frac{1}{x + e^a}$.
2. En déduire le développement en série de Fourier de $g(x) = \frac{1}{\cos x + \operatorname{ch} a}$.

Exercice 9 : Soit f la fonction 2π-périodique telle que : $\forall x \in [-\pi, \pi[, f(x) = e^x$.

1. Chercher le développement en série de Fourier de f.
2. En déduire les sommes des séries : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+1}$ et $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+1}$.

Exercice 10 : On considère la fonction 2π-périodique sur $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = x \sin\left(\frac{x}{2}\right)$ si $0 \leq x < 2\pi$.

1. Calculer les coefficients de Fourier de f.
2. Quelle est la nature de la série de Fourier S_f de f ?
3. En déduire la somme de la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{4n^2 - 1}$.

Exercice 11 : **(Centrale MP 2000)**

1. Soit $a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Développer en série de Fourier la fonction 2π-périodique valant e^{ax} sur $]0, 2\pi]$.

2. Calculer $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{a}{a^2+n^2}$. En déduire $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$.

3. Que vaut $\displaystyle\lim_{a\to+\infty} \sum_{n\geq 1} \frac{a}{a^2+n^2}$?

Exercice 12 :

1. Développer en série de Fourier la fonction f, 2π-périodique telle que $f(x) = \dfrac{\pi - x}{2}$ pour $0 \leq x \leq 2\pi$.

2. Donner les développements en série de Fourier de f(x+1) et f(x-1).

3. Montrer que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n)}{n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin^2(n)}{n^2}$.

Exercice 13 : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 2π-périodique continue par morceaux. Que peut-on dire des coefficients de Fourier de f si l'on a :

1. $\forall\, x \in \mathbb{R},\ f(x+\pi) = f(x)$?

2. $\forall\, x \in \mathbb{R},\ f(x+\pi) = -f(x)$?

Exercice 14 : **(ENS)**
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue 2π-périodique paire dont la restriction à $[0, 2\pi]$ est concave. Montrer que les coefficients de Fourier trigonométriques de f vérifient : $a_k \leq 0$ pour $k \geq 1$.

Exercice 15 : Développer en série de Fourier les fonctions suivantes puis déterminer la valeur des sommes indiquées :

1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 2π-périodique paire telle que $\forall x \in [0, \pi],\ f(x) = 1 - \dfrac{2x}{\pi}$.
   En déduire $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ et $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}$.

2. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 2π-périodique impaire telle que $\forall x \in [0, \pi]$, $f(x) = x(\pi - x)$. En déduire $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}$, $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^6}$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^6}$.

3. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 2π-périodique telle que $\forall x \in]-\pi, \pi]$, $f(x) = \sin\left(\frac{x}{2}\right)$. En déduire $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{2n+1}{16n^2+16n+3}$.

4. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 2π-périodique telle que $\forall x \in [-\pi, \pi]$, $f(x) = \mathrm{ch}(\lambda x)$ (λ réel strictement positif donné). En déduire $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\lambda^2+n^2}$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\lambda^2+n^2}$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(\lambda^2+n^2)^2}$.

5. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \sup(0, \sin x)$. En déduire $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4p^2-1}$.

Exercice 16 :

Soit $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$. Soit f l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, 2π-périodique telles que $\forall x \in [-\pi, \pi]$, $f(x) = \cos(\alpha x)$.

1. Développer la fonction f en série de Fourier.
2. En déduire que pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$,

$$\frac{\pi}{\sin(\pi z)} = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{2z}{z^2 - n^2} \text{ et } \pi \mathrm{cotan}(\pi z) = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2}.$$

Exercice 17 : Soit $f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin kx}{k}$.

1. Calculer l'abscisse, x_n, du premier maximum positif de f_n.
2. Déterminer $\lim_{n\to\infty} f_n(x_n)$.

Exercice 18 : Soit $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ une série trigonométrique convergeant uniformément sur un intervalle $[\alpha, \beta]$. Montrer que les suites (a_n) et (b_n) tendent vers 0.

Exercice 19 : Soit (a_n) une suite décroissante de limite nulle. Montrer que la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $\lim\limits_{n\to\infty} n a_n = 0$.

(Pour le sens direct : utiliser le critère de convergence uniforme de Cauchy et l'inégalité : $\sin x \geq \frac{2x}{\pi}$ sur $[0, \pi/2]$.)

Exercice 20 :

1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ paire, 2π-périodique, telle que, pour tout $x \in [0, \pi]$, $f(x) = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p^2} \sin\Big((2^{p^3} + 1)\frac{x}{2}\Big)$. Vérifier que f est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
2. Soit $A_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(t)\, dt$, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $A_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \cos(nt)\, dt$.

   Pour $\nu \in \mathbb{N}$, on pose $a_{0,\nu} = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \sin\Big((2\nu + 1)\frac{t}{2}\Big)\, dt$ et $a_{n,\nu} = \int_0^{\pi} \cos(nt) \sin\Big((2\nu + 1)\frac{t}{2}\Big)\, dt$.

   Pour $q \in \mathbb{N}$, on note $s_{q,\nu} = \sum_{i=0}^{q} a_{i,\nu}$. Montrer que si ν est fixé, $s_{n,\nu} \to 0$ lorsque $n \to \infty$. Calculer explicitement les $a_{n,\nu}$. En déduire que, pour tout q, pour tout ν, $s_{q,\nu} > 0$, et prouver que $\max\limits_{q\in\mathbb{N}}(s_{q,\nu}) = s_{\nu,\nu}$.
3. Montrer qu'il existe $B > 0$ tel que, pour tout $\nu \geq 1$, $s_{\nu,\nu} \geq B \ln \nu$.
4. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A_n = \frac{2}{\pi} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p^2} a_{n,2^{p^3}-1}$.
5. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $T_n = \frac{\pi}{2} \sum_{k=0}^{n} A_k$. Vérifier que $T_n = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p^2} s_{n,2^{p^3}-1}$. Montrer qu'il existe $D > 0$ tel que, pour tout $p \geq 1$, $T_{2^{p^3}-1} \geq Dp$, et constater que la série de Fourier de f diverge au point 0.

Exercice 21 : On pose $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{\sqrt{n}}$.

1. Montrer que f est bien définie sur $\mathbb{R}$, 2π-périodique et continue sur $\mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$.
2. Calculer $\lim_{a\to 0^+} \int_{t=a}^{\pi-a} f(t) \sin(pt)\, dt$ et en déduire que f n'a pas de développement en série de Fourier (et donc n'est pas continue en 0).