Aix-Marseille Université - Licence MPCI **Année 2015/2016**
Analyse 2 – Semestre 3 **Enseignant : P. Mercat**

TD 3 : Séries entières

Exercice 1 : Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_n a_n z^n$ dans les cas suivants.

1. $a_n = \ln(n)$
2. $a_n = \ln(2n+1)$
3. $a_n = n^\alpha,\ \alpha \in \mathbb{R}$
4. $a_n = 4^{2n-5}$
5. $a_n = \begin{cases} 2^n & \text{si } n \text{ impair,} \\ 0 & \text{si } n \text{ pair.} \end{cases}$
6. $a_n = \dfrac{n!}{n^{n+1}}$
7. $a_n = \dfrac{(n!)^k}{(kn)!}$
8. $a_n = \mathrm{ch}(n)$
9. $a_n = \sin\left(\dfrac{1}{n}\right)$
10. $a_n = \tan(1/n) - \sin(1/n)$
11. $a_n = (-2n)^{n+2}$
12. $a_n = \cos(2n\pi/3)$
13. $a_n = 3^n/n!$
14. $a_{2k} = (-2)^k$ et $a_{2k+1} = 3^k,\ \forall k \in \mathbb{N}$

Calculer la somme dans les cas 4, 5, 8, 12, 13 et 14.

Exercice 2 : Calculer les sommes des séries entières suivantes pour tous $z \in \mathbb{C}$ et $x \in \mathbb{R}$.

1. $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1+n}{n!} z^n$
2. $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1+n+n^2}{n!} z^n$
3. $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^4}{n!} z^n$
4. $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2}{(n^2-1)n!} z^n$
5. $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(2n)!}$
6. $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}\right) z^n$

Exercice 3 : Résoudre les équation différentielles

$$(E) \quad x^2 y''(x) + x(x+1)y'(x) - y(x) = 0,$$

$$(F) \quad x^2 y''(x) + 4xy'(x) + 2y(x) = e^x,$$

$$(G) \quad y''(x) - 2xy'(x) - y(x) = 0,$$

en cherchant une solution sous la forme d'une série entière.

Exercice 4 : Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n(z) = (1 + z/n)^n$ pour $z \in \mathbb{C}$. Montrer que $u_n(z)$ est développable en série entière et calculer ce développement. (on utilisera la formule du binôme).

Exercice 5 : Déterminer le développement en série entière en 0 de $\arcsin(x)$ et de $\cos(x+1)$.

Exercice 6 : Le but de cet exercice est d'établir les propriétés de la fonction exponentielle en utilisant **uniquement** sa définition en terme de série :

$$e^z := \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

On pose aussi

$$\cos z = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}), \quad \sin z = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz}), \quad z \in \mathbb{C}.$$

1. Démontrer les formules

$$e^{z+z'} = e^z e^{z'}, \quad \frac{\mathrm{d}e^z}{\mathrm{d}z} = e^z, \quad \frac{\mathrm{d}\cos z}{\mathrm{d}z} = -\sin z, \quad \frac{\mathrm{d}\sin z}{\mathrm{d}z} = \cos z, \quad \cos^2 z + \sin^2 z = 1.$$

   Pour la première égalité, on utilisera ce qui a été vu sur le produit de deux séries.

2. Pour $x \in \mathbb{R}$ vérifier que e^x, $\cos x$, et $\sin x$ sont réels et indéfiniment dérivables.

3. Montrer que exp réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $]0, +\infty[$. On pourra traiter les cas $x \geq 0$ et $x < 0$ séparément.

4. Pour tout réel x, vérifier que l'on a $e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$. En déduire l'égalité $|e^{ix}| = 1$ pour tout x réel. Exprimer ensuite $|e^z|$ en fonction de $\mathrm{Re}\, z$.

5. On suppose que $\cos x > 0$ pour tout $x \geq 0$. Montrer alors que $\sin x$ tend vers une limite $l \in]0, 1]$ quand x tend vers l'infini, et que $\sin x < l$ pour tout $x \geq 0$. En considérant $f(x) = \cos x + lx/2$ et $\lim_{x\to\infty} f(x)$, montrer une contradiction.

6. On pose $m = \inf\{x > 0, \cos x = 0\}$. Que vaut e^{2im}? e^{im}? Montrer que m est le plus petit réel strictement positif tel que $4im$ soit période de e^z.

7. On définit le nombre $\pi = 2m$. Résoudre les équations suivantes:

   (a) $e^z = 0$. (b) $e^z = 1$. (c) $\sin z = 2$.

Exercice 7 : Soit $f(x) = (\cos x)\exp(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

1. Expliquer pourquoi f possède en $x = 0$ un D.S.E. (développement en série entière).

2. Montrer que f est solution d'une certaine équation différentielle linéaire homogène du 2^e ordre à coefficients constants (E).

3. Déterminer les séries entières $S(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$ solutions de (E) par la relation entre a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, pour tout $n \geq 0$.

4. En utilisant la formule d'Euler pour $\cos x$, déterminer les coefficients f_n de la série entière $f(z) = \sum_{n\geq 0} f_n z^n$. Vérifier que f_n satisfait la relation de récurrence trouvée au 3).

Exercice 8 : Déterminer le développement de Taylor en $x = 0$ à un ordre quelconque de la fonction réelle $f(x) = \exp(-1/x^2)$ (que l'on prolongera par continuité en 0). La fonction f est-elle développable en série entière?

Exercice 9 : On note a_n la n-ième décimale de $\sqrt{2}$. Quel est le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$?

Exercice 10 : Soit α un réel irrationnel fixé. On note R_α le rayon de convergence de la série entière

$$\sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{\sin(n\pi\alpha)}$$

1. Démontrer que $R_\alpha \leq 1$.
2. On considère la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par

$$u_1 = 2 \text{ et } \forall n \geq 1, u_{n+1} = (u_n)^{u_n}.$$

Démontrer que pour tout entier $n \geq 1$,

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} \leq \frac{1}{(n+1)^n}.$$

En déduire que la série de terme général $1/u_n$ converge.

Dans la suite, on pose

$$\alpha = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{u_n}$$

et on admet que α est irrationnel.

3. Démontrer qu'il existe une constante C strictement positive telle que pour tout entier $n \geq 1$:

$$\pi u_n \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{u_k} \leq \frac{C}{u_n^{u_n - 1}}.$$

4. Démontrer que $R_\alpha = 0$.
5. Question subsidiaire : démontrer que α est effectivement irrationnel.

Énoncé fourni par le CENTRALE-SUPELEC

Exercice 11 : Soit $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R et soit $z_0 \in \mathbb{C}$. On suppose que la série $\sum_{n\geq 0} a_n z_0^n$ est semi-convergente. Déterminer R.

Exercice 12 : Soit $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R. Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes.

1. $\sum_{n\geq 0} a_n z^{2n}$.
2. $\sum_{n\geq 0} a_n^2 z^{2n}$.
3. $\sum_{n\geq 0} \frac{a_n}{n!} z^{2n}$.

Exercice 13 : Pour x réel, on pose
$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}}.$$

1. Déterminer le rayon de convergence de la série entière définissant f.
2. Étudier la convergence de la série entière en 1 et en -1.
3. Établir la continuité de f en -1.
4. Déterminer la limite de f en 1.

Exercice 14 : Soit $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$ et de somme f.

1. Exprimer la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n} z^{2n}$ en fonction de f pour $|z| < R$.
2. Même question avec $\sum_{n=0}^{+\infty} a_{3n} z^{3n}$.

Exercice 15 : Trouver le domaine de définition et faire l'étude aux bornes de la fonction f définie par
$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) x^n.$$

Exercice 16 : Former le développement en série entière en 0 de la fonction $x \mapsto \ln(x^2 + x + 1)$.

Exercice 17 : Former le développement en série entière en 0 de la fonction $x \mapsto \ln(x^2 - 5x + 6)$.

Exercice 18 : Montrer l'égalité $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x} dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$.

Exercice 19 : Montrer que pour tout $a > 0$, on a $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{1+t^a} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{na+1}$.

En déduire les sommes $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1}$.