TD 0 : Rappels sur les suites

Exercice 1 : Dans chacun des cas suivants déterminer si la suite (a_n) est géométrique et si elle est arithmétique. Donner la raison de la suite le cas échéant.

1. $a_n = 4 \cdot 3^n$ pour $n \geq 2$.
2. $a_n = 4(1-n) + 5n$ pour $n \geq 0$.
3. $a_0 = 1$ et pour tout $n \geq 0,\ a_{n+1} = 2a_n + 1$.
4. $b_n = a_n + 1$ pour tout $n \geq 0$ où a_n est la suite du 3. ci dessus.
5. $a_n = \cos^2(n\theta) - \sin^2(n\theta) + 2i\sin(n\theta)\cos(n\theta)$ pour $n \geq 0$.

Calculer les sommes des n premiers termes de ces suites.

Exercice 2 : Déterminer si les suites suivantes convergent, et calculer leur limite.

1. $a_n = \cos(n) + \sin(n)$.
2. $a_n = n\sin(1/n)$.
3. $a_n = \frac{\cos(n)+2}{\ln(n)}$.
4. $a_n = (1 + \frac{1}{n})^n$.
5. $a_n = n^{1/n}$.
6. $a_n = n^2\left[\ln(1+1/n) - \sin(1/n)\right]$.
7. $a_n = \frac{2+n^2\cos\left(\frac{1+n}{1+n+n^2}\right)}{1+2n+3n^2}$.
8. $a_0 = 1$ et pour $n \geq 0, a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + 1$.
9. $a_n = \frac{n!}{n^n}$.
10. a_{n+1}/a_n où $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ et pour tout $n \geq 0, a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$.

Exercice 3 : Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par

$$a_0 = 2 \quad \text{et} \quad a_{n+1} = \frac{a_n + 2/a_n}{2}, \quad \forall n \geq 0.$$

1. Démontrer que pour tout $n \geq 0$, on a $a_n > 0$.
2. Etudier les variations de la fonction $x \mapsto x + 1/x$ sur $\mathbb{R}+$.
3. En déduire que pour tout $n \geq 0$, $a_n \geq \sqrt{2}$.
4. Montrer que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
5. Montrer que la suite converge et calculer sa limite.
6. Posons $a_n = \sqrt{2} + \epsilon_n$. Montrer que l'on a $a_{n+1} = \sqrt{2} + \epsilon_n^2/4 + \underset{n\to\infty}{o}\left(\epsilon_n^2\right)$.
7. En déduire que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a une vitesse doublement exponentielle : a_n donne une approximation de sa limite avec un nombre de décimales correctes qui double à chaque fois que n augmente de 1.

Rappels : équivalents, comparaisons et développements limités usuels

Comparaisons usuelles (croissances comparées)

$$\boxed{\ln(n) = \underset{n\to\infty}{o}(n)} \quad \boxed{n^\beta = \underset{n\to\infty}{o}\left(e^{\alpha n}\right) \text{ pour } \alpha > 0} \quad \boxed{e^{\alpha n} = \underset{n\to\infty}{o}\left(n^\beta\right) \text{ pour } \alpha < 0}$$

$$\boxed{e^{\alpha n} = \underset{n\to\infty}{o}(n!)} \quad \boxed{n! = \underset{n\to\infty}{o}\left(n^n\right)}$$

Formule de Stirling

$$\boxed{n! \underset{n\to\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n}$$

Équivalents usuels

$$a_0 + a_1 n + a_2 n^2 + \ldots + a_{k-1}n^{k-1} + a_k n^k \underset{n\to\infty}{\sim} a_k n^k \qquad \text{si } a_k \neq 0.$$

$$\boxed{\sin(x) \underset{x\to0}{\sim} x} \quad \boxed{\cos(x) - 1 \underset{x\to0}{\sim} -\frac{x^2}{2}} \quad \boxed{\operatorname{sh}(x) \underset{x\to0}{\sim} x} \quad \boxed{\operatorname{ch}(x) - 1 \underset{x\to0}{\sim} \frac{x^2}{2}} \quad \boxed{e^x - 1 \underset{x\to0}{\sim} x}$$

$$\boxed{\ln(x+1) \underset{x\to0}{\sim} x} \quad \boxed{\frac{1}{1-x} \underset{x\to0}{\sim} x} \quad \boxed{\arctan(x) \underset{x\to0}{\sim} x} \quad \boxed{\arcsin(x) \underset{x\to0}{\sim} x} \quad \boxed{\arccos(x) - \frac{\pi}{2} \underset{x\to0}{\sim} -x}$$

$$\boxed{\operatorname{argsh}(x) \underset{x\to0}{\sim} x}$$

Développements limités usuels

$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{6} + \frac{z^4}{24} + \underset{z\to0}{O}\left(z^6\right)$	$(1+z)^\alpha = 1 + \alpha z + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}z^2 + \underset{z\to0}{O}\left(z^3\right)$
$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \underset{x\to0}{O}\left(x^5\right)$	$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + z^5 + \underset{z\to0}{O}\left(z^6\right)$
$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \underset{x\to0}{O}\left(x^5\right)$	$\frac{1}{1+z} = 1 - z + z^2 - z^3 + z^4 - z^5 + \underset{z\to0}{O}\left(z^6\right)$
$\sin(z) = z - \frac{z^3}{6} + \frac{z^5}{120} - \frac{z^7}{5040} + \underset{z\to0}{O}\left(z^9\right)$	$\arcsin(x) = x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + \underset{x\to0}{O}\left(x^7\right)$
$\cos(z) = 1 - \frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{24} - \frac{z^6}{720} + \underset{z\to0}{O}\left(z^8\right)$	$\arccos(x) = \pi/2 - x - \frac{x^3}{6} - \frac{3x^5}{40} + \underset{x\to0}{O}\left(x^7\right)$
$\operatorname{sh}(z) = z + \frac{z^3}{6} + \frac{z^5}{120} + \frac{z^7}{5040} + \underset{z\to0}{O}\left(z^9\right)$	$\operatorname{argsh}(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + \underset{x\to0}{O}\left(x^7\right)$
$\tan(z) = z + \frac{z^3}{3} + \frac{2z^5}{15} + \underset{z\to0}{O}\left(z^7\right)$	$\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \underset{x\to0}{O}\left(x^9\right)$
$\operatorname{th}(z) = z - \frac{z^3}{3} + \frac{2z^5}{15} + \underset{z\to0}{O}\left(z^7\right)$	$\operatorname{argth}(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \underset{x\to0}{O}\left(x^9\right)$
$\operatorname{ch}(z) = 1 + \frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{24} + \frac{z^6}{720} + \underset{z\to0}{O}\left(z^8\right)$	