

TD 2 : Suites et séries de fonctions

Suites de fonctions

Exercice 1 : On considère les suites de fonctions définies sur $[0, 1]$ par

$$f_n(x) = x^n, \quad g_n(x) = \frac{x^n}{n}, \quad h_n(x) = \begin{cases} 1 - nx & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{n}, \\ 0 & \text{si } \frac{1}{n} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

1. Étudier la convergence simple et la convergence uniforme de ces suites de fonctions sur $[0, 1]$.
2. Étudier la dérivée de g_n . Que pouvez-vous en conclure ?

Exercice 2 : Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite de fonctions définies sur $] - \infty, +\infty[$ par $f_n(x) = \frac{x^{2n}}{1 + x^{2n}}$.

1. Montrer que cette suite de fonctions converge simplement vers une fonction f que l'on déterminera.
2. Montrer que la convergence est uniforme sur tous les intervalles du type $[a, b]$ avec $|a| < 1$ et $|b| < 1$, ou bien $a > 1$, ou bien $b < -1$.
3. Montrer qu'il n'y a pas convergence uniforme sur les intervalles contenant 1 ou -1 .

Exercice 3 : Étudier la convergence simple et la convergence uniforme de la suite de fonctions définies sur $[0, 1]$ par $f_n(x) = x^n \sin(\pi x)$.

Exercice 4 : Étudier la convergence simple et la convergence uniforme de la suite de fonctions $f_n(x) = \frac{nx^3}{1 + nx}$ définies sur l'intervalle $[0, 1000]$. Que dire de cette convergence sur l'intervalle $[0, \infty[$?

Exercice 5 : Soit la suite de fonctions $f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{nx}$, $x \in]0, 1[$. Étudier la convergence simple et la convergence uniforme de cette suite sur l'intervalle de définition.

Exercice 6 : Déterminer la limite suivante : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{ne^x}{n+x} dx$.

Exercice 7 : Soit la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies sur $[-1, 1]$ par

$$f_n(x) = \frac{x}{1 + n^2 x^2}.$$

1. Montrer qu'elle converge uniformément sur $[-1, 1]$ vers une fonction f que l'on déterminera.
2. Montrer que $\lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x) = f'(x)$, dans tout intervalle de la forme suivante : $[-1, b]$, $b < 0$ ou $[a, 1]$, $a > 0$.
3. Montrer que cette dernière propriété n'est pas vraie sur $[-1, 1]$.

Exercice 8 : Montrer que la limite simple d'une suite de fonctions convexes est convexe.

Exercice 9 : Soit α un nombre réel positif ou nul, et $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite de fonctions définies sur $[0, 1]$ par $f_n(x) = \frac{nx}{1 + n^2 x^\alpha}$.

1. Déterminer les valeurs de α pour lesquelles la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers une fonction f sur $[0, 1]$.
2. Dans les deux cas $\alpha = 2$ et $\alpha = 4$, étudier la convergence de la suite $\left(\int_0^1 f_n(x) dx \right)_{n \in \mathbb{N}}$.
Cette suite converge-t-elle vers $\int_0^1 f(x) dx$?

Exercice 10 : Soit $(f_n)_{n \geq 1}$ la suite de fonctions définies sur \mathbb{R}^+ par $f_n(x) = \begin{cases} (1 - \frac{x}{n})^n & \text{si } x \in [0, n], \\ 0 & \text{si } x > n. \end{cases}$
Montrer que la suite $(f_n)_{n \geq 1}$ converge simplement, puis uniformément sur \mathbb{R}^+ .

Exercice 11 : Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions croissantes réelles, continues et définies sur un segment $[a, b]$ de \mathbb{R} . Si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers une fonction f continue sur $[a, b]$, montrer qu'alors la convergence est uniforme.

Exercice 12 : Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(t) = \sqrt{t}$, $t \in [0, 1]$. On définit sur $[0, 1]$ la suite de fonctions $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par

$$p_0(t) = 0, \quad p_{n+1}(t) = p_n(t) + \frac{1}{2}(t - (p_n(t))^2), \quad t \in [0, 1], n \in \mathbb{N}.$$

1. (a) Calculer p_1 et p_2 .
- (b) Montrer que les applications p_n , $n \in \mathbb{N}$, sont polynomiales.
2. (a) Montrer que pour tout $t \in [0, 1]$ et tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\sqrt{t} - p_{n+1}(t) = (\sqrt{t} - p_n(t)) \left(1 - \frac{1}{2}(\sqrt{t} + p_n(t))\right)$$

- (b) En déduire que $0 \leq p_n(t) \leq \sqrt{t}$ pour tout $t \in [0, 1]$ et tout $n \in \mathbb{N}$.
3. (a) Soit $t \in [0, 1]$ fixé. Montrer que la suite $(p_n(t))_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.
- (b) En déduire que la suite de fonctions $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers une limite que l'on déterminera.
4. (a) En utilisant la relation du 2.(a), montrer que pour tout $t \in [0, 1]$ et tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$0 \leq \sqrt{t} - p_n(t) \leq \sqrt{t} \left(1 - \frac{1}{2}\sqrt{t}\right)^n$$

- (b) Soit $n \geq 1$ fixé. En étudiant la fonction $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(x) = x \left(1 - \frac{x}{2}\right)^n$, montrer que

$$|p_n(t) - f(t)| \leq \frac{2}{n+1} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n, \quad \text{pour tout } t \in [0, 1].$$

5. Montrer que la suite de fonctions $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $[0, 1]$.

Exercice 13 : Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle qu'il existe $k > 0$ avec

$$|f(x+y) - f(x) - f(y)| \leq k, \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

À tout $n \in \mathbb{N}$, on associe la fonction g_n définie sur \mathbb{R} par $g(x) = \frac{1}{2^n} f(2^n x)$.

1. En écrivant $2^{n+1} = 2^n + 2^n$, montrer que

$$|g_{n+1}(x) - g_n(x)| \leq \frac{k}{2^{n+1}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

2. Montrer alors que pour tout $p \in \mathbb{N}$ et tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$|g_{n+p}(x) - g_n(x)| \leq \frac{k}{2^n}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

3. En déduire que la suite $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers une fonction continue $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

4. Montrer que g vérifie $g(x+y) = g(x) + g(y)$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$.

5. En déduire que $g(x) = xg(1)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Indication : On pourra d'abord montrer que $g\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{p}{q}g(1)$ pour $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}, q \geq 1$.

Exercice 14 : Soit la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies sur $[0, +\infty[$ par $\frac{n}{(x-n)^2 + n^2}$.

1. Montrer que la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[0, +\infty[$ vers une fonction f que l'on déterminera.

2. Montrer que les deux intégrales généralisées $\int_0^{+\infty} f_n(x) dx$ et $\int_0^{\infty} f(x) dx$ convergent, mais que l'on ne peut pas intervertir les limites :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{+\infty} f_n(x) dx \neq \int_0^{+\infty} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx.$$

Expliquer.

Séries de fonctions

Exercice 15 : Déterminer la convergence simple et la convergence uniforme des séries de fonctions dont les termes généraux sont les suivants.

1. $u_n(x) = x^n(1 - x^n), x \in [0, 1]$

4. $x_n(x) = \frac{1}{n} \sin\left(\frac{x}{n}\right), x \in \mathbb{R}$

2. $v_n(x) = \frac{x}{n(1 + nx^2)}, x \in \mathbb{R}$

3. $w_n(x) = \frac{(-1)^n}{n + x^2}, x \in \mathbb{R}$

5. $y_n(x) = \frac{\sin(nx)}{1 + n^2x^2}, x > 0$

Exercice 16 : Étudier les domaines de convergence simple et de convergence uniforme des séries des fonctions définies par les termes généraux

1. $a_n(x) = \frac{\sin(2^n \pi x)}{2^n},$

3. $c_n(x) = \frac{1}{n^2 + x^2},$

5. $s_n(x) = \frac{1}{2^{n-1} \sqrt{1 + nx}},$

2. $b_n(x) = e^{-n^2x},$

4. $t_n(x) = \frac{e^{-n^2x^2}}{n^2},$

6. $z_n(x) = \frac{\cos(nx)}{e^{nx}}.$

Exercice 17 : Soit la série de fonctions de terme général $f_n(x) = \frac{\cos(nx)}{n^p}.$

1. Montrer que si $p > 1$, elle converge uniformément sur \mathbb{R} .
2. Montrer que la convergence est uniforme pour $0 < p \leq 1$ dans tout intervalle $[\alpha, \beta]$ où $k\pi < \alpha < \beta < (k + 1)\pi$.

Exercice 18 : Soit $(f_n)_{n \geq 1}$ la suite de fonctions définies sur $[0, +\infty[$ par $f_n(x) = \frac{x}{x^2 + n^2}.$

1. Soit $M > 0$. Montrer que la série de terme général $(f_n)_{n \geq 1}$ converge normalement sur $[0, M]$.
2. En déduire que la fonction somme $f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$ est continue sur \mathbb{R}_+ .
3. Étudier la convergence de la série $\sum_{n \geq 1} (-1)^n f_n$ sur $[0, \infty[$.

Exercice 19 : Montrer que la série de fonctions définie par son terme général $f_n(x) = \frac{1}{n^2} \sin\left(\frac{x}{n}\right)$ converge uniformément sur \mathbb{R} . On note f sa somme; exprimer $\int_0^1 f(x) dx$ comme somme d'une série numérique.

Exercice 20 : Soit $f_n(x) = e^{-nx} \sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)$ le terme général d'une série de fonctions définies sur $[0, +\infty[$. Montrer qu'elle converge simplement vers une fonction f dérivable et que $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x)$.

Exercice 21 : On considère la série de fonctions définies sur $[0, 1]$ par le terme général $f_n(x) = \frac{x^n}{n^3(1+x^n)}$.

1. Étudier la convergence simple et la convergence uniforme de cette série sur l'intervalle $[0, 1]$.
2. La fonction $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ est-elle dérivable sur $[0, 1]$?

Exercice 22 : Soit la série de terme général $f_n(x) = \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) - \frac{x}{n}$, pour $x \in [0, 1]$.

1. Étudier la convergence simple et la convergence uniforme de cette série sur l'intervalle $[0, 1]$.
2. Montrer que la fonction $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ est dérivable et exprimer sa dérivée en fonction des dérivées des fonctions f_n .
3. Calculer la valeur de la dérivée $f'(x)$ au point $x = 1$.

Exercice 23 : Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite de fonctions définies sur $[0, +\infty[$ par $f_n(x) = (-1)^n e^{-(n+1)x}$.

1. Montrer que la série de terme général $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge sur \mathbb{R}_+ vers une fonction f continue.
2. Montrer que l'on a $\lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^N f(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$.
3. En déduire l'égalité $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -\ln(2)$.

Exercice 24 : Soit $f_n(x) = \frac{1}{n^2 + n^3 x}$ le terme général d'une série de fonctions. Montrer qu'elle converge sur \mathbb{R} vers une fonction f dérivable.

Exercice 25 : Montrer que la fonction $f(x) = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{1+x^n}$ est définie sur $]1, +\infty[$. Montrer qu'elle est de classe C^1 sur $]1, \infty[$, et tracer son graphe.

Exercice 26 : Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $S(x) = \sum_{n \geq 1} \frac{(\cos(x))^n \sin(nx)}{n}$.

1. Justifier que S est définie sur \mathbb{R} et π -périodique.
2. Montrer que S est de classe C^1 sur $]0, \pi[$ et calculer sa dérivée. En déduire une expression de S sur $[0, \pi]$