Corrigé du troisième devoir maison

Démontrer les propositions suivantes.

Proposition 1:

Si $f_n \xrightarrow[\text{sur } [a,b]]{CVS} f$ *et* $f_n \xrightarrow[\text{sur }]a,b[]{CVU} f$*, alors* $f_n \xrightarrow[\text{sur } [a,b]]{CVU} f$.

Démontrons la proposition 1. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions vérifiant les hypothèses, avec f la limite simple de la suite f_n. On a

$$\sup\{|f_n(x)-f(x)| \mid x\in[a,b]\} = \max\big(\sup\{|f_n(x)-f(x)| \mid x\in]a,b[\},\ |f_n(a)-f(a)|,\ |f_n(b)-f(b)|\big)$$

Or, l'hypothèse de convergence uniforme sur $]a,b[$ est équivalente à

$$\sup\{|f_n(x)-f(x)| \mid x\in]a,b[\} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

et la convergence simple en a et en b donne

$$|f_n(a)-f(a)| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \quad \text{et} \quad |f_n(b)-f(b)| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

On a donc

$$\sup\{|f_n(x)-f(x)| \mid x\in[a,b]\} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

ce qui est équivalent à la convergence uniforme de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers f sur l'intervalle $[a,b]$.

Proposition 2:

Soit une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de fonctions continues sur* $[a,b]$ *qui converge uniformément sur* $]a,b[$*. Alors la suite* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge uniformément sur* $[a,b]$.

Démontrons la proposition 2. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions vérifiant les hypothèses. Cette fois-ci on ne sait pas qu'il y a convergence simple sur $[a,b]$ (on le sait seulement sur $]a,b[$,) et donc la fonction limite n'est pas définie en a et en b. Ne connaissant pas la limite, montrons plutôt que la suite f_n vérifie le critère de Cauchy uniforme sur $[a,b]$. Pour tous entiers p et q, on a

$$\sup\{|f_p(x)-f_q(x)| \mid x\in[a,b]\} = \sup\{|f_p(x)-f_q(x)| \mid x\in]a,b[\}$$

par continuité des fonctions f_p et f_q. En effet, si M est un majorant de l'ensemble $\sup\{|f_p(x)-f_q(x)| \mid x\in]a,b[\}$, alors en faisant tendre x vers a et vers b dans l'inégalité $|f_p(x)-f_q(x)|\le M$, on obtient les inégalités $|f_p(a)-f_q(a)|\le M$ et $|f_p(b)-f_q(b)|\le M$ par continuité.
On a

$$\sup\{|f_p(x)-f_q(x)| \mid x\in]a,b[\} \xrightarrow[p,q\to\infty]{} 0$$

par hypothèse, et donc

$$\sup\{|f_p(x)-f_q(x)| \mid x\in[a,b]\} \xrightarrow[p,q\to\infty]{} 0.$$

Ainsi la suite de fonctions vérifie le critère de Cauchy uniforme sur $[a,b]$ et donc converge uniformément sur $[a,b]$.