

Passerelle pour les maths  
Licences de mathématiques et d'informatique

3 septembre 2014

# 1 Calculs dans $\mathbb{R}$

## 1.1 Fractions

**Exercice 1** Pour  $a = 4/9$  et  $b = 5/12$ , calculer  $a + b$ ,  $a - b$ ,  $ab$  et  $a/b$ . On donnera le résultat sous forme d'une fraction irréductible.

**Exercice 2** Résoudre dans  $\mathbb{R}$ , les équations

$$\frac{2}{-5x+1} + \frac{-3}{4x+3} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{-7x}{7x+2} = \frac{x}{-x+1} \quad (2)$$

**Exercice 3** Résoudre dans  $\mathbb{R}$ , les inéquations

$$\frac{2}{-5x+1} + \frac{-3}{4x+3} > 0 \quad (3)$$

$$\frac{-7x}{7x+2} < \frac{x}{-x+1} \quad (4)$$

## 1.2 Développer et factoriser

**Exercice 4** Soient  $a$  et  $b$  deux réels, factoriser les expressions suivantes :

$$\begin{aligned} a^2 - b^2 \\ a^3 - b^3 \\ a^3 + b^3 \end{aligned}$$

**Exercice 5** Soient  $a$ ,  $b$  et  $c$  trois réels. Calculer les expressions suivantes :

$$\begin{aligned} (a+b)^2 + (a-b)^2 \\ (a+b)^3 - (a-b)^3 \\ (a+b+c)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 + (a-b)^2 \end{aligned}$$

**Exercice 6** Soient  $a$ ,  $b$ ,  $x$  et  $y$  quatre réels. Factoriser les expressions suivantes :

$$\begin{aligned} 5(x+2y) - 10(x+2y)(x-3) \\ xy - x - y + 1 \\ a^2x^2 - b^2y^2 \end{aligned}$$

### 1.3 Racines carrées

**Exercice 7** 1. Ecrire plus simplement  $\sqrt{12}-\sqrt{3}$ ,  $(\sqrt{2}-\sqrt{3})(\sqrt{2}+\sqrt{3})$ ,  $(\sqrt{2}+\sqrt{6})^2$ .

2. Soient  $A = 2 - \sqrt{5}$  et  $B = \sqrt{9 - 4\sqrt{5}}$ . En calculant  $A^2$  et  $B^2$ , justifier que  $A^2 = B^2$ . Peut-on en déduire que  $A = B$ ?

3. Justifier les égalités suivantes :

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}; \quad \frac{1}{\sqrt{11}-3} = \frac{\sqrt{11}+3}{2}; \quad \sqrt{45}-\sqrt{48}+\sqrt{5} = 4(\sqrt{5}-\sqrt{3}).$$

### 1.4 Inégalités, intervalles et valeur absolue

**Exercice 8** Compléter (on justifiera les résultats) :

$x$  est dans l'intervalle  $[-2, 4]$   $\iff -2x + 3$  est dans l'intervalle .....

$x$  est dans l'intervalle  $] -\infty, -5]$   $\iff \frac{1}{x}$  est dans l'intervalle .....

**Exercice 9** Soient  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ . On suppose  $a < b$  et  $c < d$ .

1. Dans quels cas l'*intersection*  $[a, b] \cap [c, d]$  est-elle vide?
2. Dans quels cas est-ce un intervalle non vide? Lequel?
3. Dans quels cas est-ce un singleton? Lequel?
4. Dans quels cas l'*union*  $[a, b] \cup [c, d]$  est-elle un intervalle? Lequel?

On illustrera chaque cas par un exemple.

**Exercice 10** Déterminer les intervalles de  $\mathbb{R}$  définis par les conditions suivantes sur  $x$  :

1.  $|x - 2| \leq 1$ .
2.  $|2x + 1| > 1$ .