Correction du partiel 2 – Décembre 2013

Exercice 1 :

1. Soit $a_n = (n+1)^\alpha/n!$, $n \geq 0$, le coefficient de la série. On a

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{1}{n+1}\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^\alpha \to 0 \quad \text{quand} \quad n \to \infty,$$

donc par la règle de d'Alembert, le rayon R vaut $+\infty$.
2. (a) On sait que

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!},$$

avec un rayon $R = \infty$.
2. (b) Par la régle de d'Alembert, on trouve facilement que $R = \infty$. Pour la somme on écrit

$$\begin{aligned}\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{n+1}{n!}x^n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(n-1)!} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \\ = xe^x + e^x = e^x(x+1).\end{aligned}$$

3. On a, pour tout n,

$$|a_{2n}|^{1/2n} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{et} \quad |a_{2n+1}|^{1/(2n+1)} = 1,$$

donc $\limsup_{n\infty} |a_n|^{1/n} = 1$ et $R = 1$ par la règle d'Hadamard.
4. (a) La relation $|a_n| \sim |b_n|$ entraine que $|a_n|^{1/n} \sim |b_n|^{1/n}$, quand $n \to \infty$ (si les b_n ne s'annulent pas, $|a_n|/|b_n|$ tend vers 1 entraine que $(|a_n|/|b_n|)^{1/n}$ tend vers 1) donc

$$R_1 = \limsup_{n\infty} |a_n|^{1/n} = \limsup_{n\infty} |b_n|^{1/n} = R_2.$$

4. (b) Par composition des développements limités de $\sin(x)$ et $\ln(1+x)$ pour x près de 0, on a

$$\ln\left(1 + \sin\left(\frac{1}{n}\right)\right) \sim \frac{1}{n} \quad \text{quand} \quad n \to \infty,$$

donc le rayon de convergence est le même que celui de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{n}$ qui est 1.

Exercice 2 :

1) On remplace dans (E) la fonction $y(x)$ et ses dérivées par les séries correspondantes, ce qui donne

$$x^2\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + x(x+1)\sum_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

soit

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^n + \sum_{n=2}^{\infty}(n-1)a_{n-1}x^n + \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0. \qquad (1)$$

En égalant les termes de degré n pour $n \geq 2$, on obtient

$$n(n-1)a_n + (n-1)a_{n-1} + na_n - a_n = 0$$

soit

$$(n^2-1)a_n + (n-1)a_{n-1} = 0,$$

d'où

$$a_n/a_{n-1} = -1/(n+1), \quad n \geq 2, \qquad (2)$$

et donc $R = \infty$ par la régle de d'Alembert.
2) Le terme de degré 0 dans (1) vaut $-a_0$ d'où $a_0 = 0$. Le terme de degré 1 vaut $a_1 - a_1 = 0$ ce qui ne dit rien sur a_1. Ce coefficient est donc arbitraire. Avec (2), on obtient successivement

$$a_2 = -\frac{1}{3}a_1, \quad a_3 = \left(-\frac{1}{4}\right)a_2 = \left(-\frac{1}{4}\right)\left(-\frac{1}{3}\right)a_1, \quad a_4 = \ldots,$$

et de manière générale

$$a_n = \left(-\frac{1}{n+1}\right)\ldots\left(-\frac{1}{3}\right)a_1 = 2\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}a_1, \quad n \geq 2.$$

3) D'après la question précédente, on a

$$y(x) = a_1 x + 2a_1 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}x^n = a_1 x + \frac{2a_1}{x}\sum_{n=3}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}x^n = a_1 x + \frac{2a_1}{x}(e^{-x} - 1 + x - \frac{x^2}{2})$$
$$= \frac{2a_1}{x}\left(e^{-x} - 1 + x\right).$$

Exercice 3 : Traité en TD.