Quelques erreurs à éviter

26 novembre 2013

— La convergence uniforme sur tout intervalle de la forme $[a, +\infty[$ **n'implique pas** la convergence uniforme sur $\mathbb{R}_+^*$ (idem pour la convergence normale).
En revanche, c'est vrai pour la convergence simple, pour le fait qu'une fonction soit continue, ou dérivable, ou de classe C^1, C^2, etc... ce qui permet de démontrer qu'une somme de série est continue, dérivable, C^1, etc... sur $\mathbb{R}_+^*$ en montrant seulement des convergences uniformes sur les intervalles $[a, +\infty[$ pour tout $a > 0$.

— Bien vérifier les hypothèses des théorèmes utilisés. En particulier, pour utiliser le théorème de dérivation termes à termes d'une série de fonctions $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ sur un intervalle I, il faut montrer :
— que la série $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ converge simplement sur I (ou au moins en un point de I).
— que les fonctions f_n sont toutes dérivables sur I.
— que la série des dérivées $\sum_{n=0}^{\infty} f'_n$ converge uniformément sur I.
C'est seulement après avoir vérifié tout cela que l'on peut appliquer le théorème qui dit que la somme $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ est dérivable et que l'on a

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} f'_n.$$

— Si une fonction f est dérivable, alors elle est continue, mais **la réciproque est fausse**.