| | |
|---|---|
| Université d'Aix-Marseille | PEIP |
| Semestre 3 | 2013-2014 |

**UE Analyse et Calcul intégral**

# Partiel 1 - Durée : 2 heures

Pas de documents - Pas de calculatrice - Pas de portable

*Toute réponse doit être justifiée, la clarté et la précision de la rédaction seront des éléments importants d'appréciation de la copie.*

## Exercice 1

1. En utilisant la décomposition en éléments simples du terme général de la série $\sum_{n\geq 1} u_n = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$, démontrez que cette série converge vers $\frac{1}{4}$.

2. Déterminer la nature de la série $\sum_{n\geq 1} \left( \frac{1}{\sqrt{n}} - \sqrt{n}\sin(\frac{1}{n}) \right)$.

3. Montrer que si la série $\sum_{n\geq 1} u_n$ est une série convergente à termes positifs alors la série $\sum_{n\geq 1} \ln(1+u_n)$ converge.

4. Montrer que la série $\sum_{n\geq 0} \frac{3^n}{1+4^{2n}}$ converge et que son reste $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{3^k}{1+4^{2k}}$ vérifie :
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad 0 \leq R_n \leq \frac{1}{4\,(5)^n}$$

5. (a) Montrer que : $\forall k \geq 1 \quad \frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{x}dx \leq \frac{1}{k}$

   (b) En déduire que la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}{\ln(n!)}$ diverge.

   *Indication :* On pourra majorer simplement le dénominateur.

---

Tournez la page SVP

## EXERCICE 2

1. Quelle est la nature de la série $\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ ? Justifiez !

2. Montrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \int_0^1 \frac{x^{2n+2}}{1+x^2}dx \leq \frac{1}{2n+3}.$$

3. Pour $x \in [0,1]$, on notera $f_n(x) = \sum_{k=0}^{n}(-x^2)^k$.

   En calculant l'intégrale de $f_n$ sur l'intervalle $[0,1]$ déterminer la somme de la série $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$.

## EXERCICE 3

Soit $n \in \mathbb{N}$ entier naturel, on considère la fonction $f_n$ définie sur $]0,+\infty[$ par:

$$f_n(x) = n^2x^2e^{-nx}$$

1. Etudier la convergence simple de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $]0,+\infty[$.

2. Notons $f$ la fonction limite simple de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $]0,+\infty[$. Le but de cette question est d'étudier la convergence uniforme de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers $f$ sur $]0,+\infty[$.

   (a) Rappeler la définition de la convergence uniforme de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers $f$ sur $]0,+\infty[$.

   (b) La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle uniformément vers $f$ sur $]0,+\infty[$? **Justifier avec soin !**