Université d'Aix-Marseille | PEIP
Semestre 3 | 2013-2014

UE Analyse et Calcul intégral

Partiel 2 - Durée : 2 heures

Pas de documents - Pas de calculatrice - Pas de portable

Toute réponse doit être justifiée, la clarté et la précision de la rédaction seront des éléments importants d'appréciation de la copie.

Exercice 1

1. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{(n+1)^\alpha}{n!} z^n$ (avec $\alpha \in \mathbb{R}$)

2. (a) Rappeler le développement en série entière de la fonction f définie par $f(x) = e^x$. Quel est son rayon de convergence ?

   (b) Déterminer le rayon de convergence puis la somme de la série entière $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{(n+1)}{n!} x^n$ de la variable réelle x.

3. Déterminer le rayon de convergence puis la somme de la série entière $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$ de la variable réelle x où la suite $(a_n)_n$ est définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad a_{2n} = \frac{1}{2^n} \qquad a_{2n+1} = (-1)^n$$

4. (a) Soient les séries entières $\displaystyle\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ et $\displaystyle\sum_{n\geq 0} b_n z^n$ de rayons de convergence respectifs R_1 et R_2. On suppose que $|a_n| \sim_{+\infty} |b_n|$. Montrer alors que $R_1 = R_2$.

   (b) Utiliser le résultat de **a)** pour déterminer le rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \ln\left(1 + \sin\left(\frac{1}{n}\right)\right) z^n$.

Tournez la page SVP

EXERCICE 2

Soit l'équation différentielle (E) définie par :

$$(E) \quad x^2 y'' + x(x+1)y' - y = 0$$

1. On veut déterminer les solutions de (E) développables en série entière sous la forme $y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, x^n$, série de rayon de convergence $R > 0$.
   Déterminer le rapport $\dfrac{a_n}{a_{n-1}}$ pour tout $n \geq 2$ et en déduire R.
2. Déterminer le coefficient a_0 puis les coefficients a_n en fonction de a_1 pour tout $n \geq 2$.
3. Exprimer la somme de la série entière $y(x)$ à l'aide de la fonction exponentielle.

EXERCICE 3

On considère la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} f_n(x)$ où $\forall x > 0 \quad f_n(x) = \dfrac{1}{n + n^2 x}$.

1. Montrer que cette série de fonctions converge simplement sur $]0, +\infty[$.
2. On notera S la fonction somme de cette série. Montrer que S est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, +\infty[$ pour tout $a > 0$. En déduire que S est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$.
3. Etudier la monotonie de S.
4. Etudier la limite en $+\infty$ de S.
5. Déterminer un équivalent de S en $+\infty$.