TD 1 : Séries Numériques 1

Compléments sur les suites et Critère de Cauchy

Exercice 1 : Montrer que la série de terme général $\frac{1}{2^n}$ converge en utilisant le critère de Cauchy.

Exercice 2 : a) Montrer que la série de terme général $\frac{1}{n}$ $(n \geq 1)$ ne satisfait pas le critère de Cauchy, en minorant la suite $v_n = \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k}$.

b) Montrer que la série de terme général $\frac{1}{n(n-1)}$ $(n > 1)$ converge et calculer sa somme. En déduire, outre la convergence de la série de terme général $\frac{1}{n^2}$ $(n > 0)$, une majoration de la somme $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

c) Plus généralement, étudier la convergence de la série de Riemann $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Pour le cas $\alpha > 1$, considérer la série $\sum a_n$ avec $a_n = \frac{1}{n^{\alpha-1}} - \frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}}$, et donner un équivalent petit de a_n quand n tend vers l'infini.

Exercice 3 : Montrer que la série de terme général $\frac{n^2}{n!}$ converge et calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{n!}$. (On rappelle que $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} = e$).

Exercice 4 : Soient $(u_n)_{n\geq 0}$, $(v_n)_{n\geq 0}$, $(w_n)_{n\geq 0}$ trois suites réelles telles que $u_n \leq v_n \leq w_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que si les séries de terme général u_n et w_n convergent, alors il en est de même pour la série de terme général v_n.

Exercice 5 : Montrer que la série de terme général

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{n-1}} - \frac{2}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

(pour $n \geq 2$) est convergente, et calculer sa limite. Ecrire la somme de façon étendue, et voir que de nombreuses simplifications ont lieu.

Exercice 6 : Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite de termes positifs telle que la série de terme général $\frac{1}{1+nu_n}$ soit convergente. Déterminer $\lim_{n\to+\infty}(nu_n)$. Montrer que la série de terme général u_n est divergente.

Exercice 7 : Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite positive telle que la série de terme général u_n soit convergente. Montrer la convergence des séries de terme général :

a) u_n^2 **b)** $\ln(1+u_n)$ **c)** $\frac{1}{n}\sqrt{u_n}$

Indication: pour c), comparer d'abord $\sqrt{xy}$ et $\frac{x+y}{2}$, où x, y sont des réels positifs.

Exercice 8 : Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite de termes positifs. Montrer que la série de terme général u_n est convergente si et seulement si il en est de même pour la série de terme général $v_n = \frac{u_n}{1+u_n}$.

Exercice 9 : Etudier la convergence des séries de terme général :

a) $\sqrt{n^4+2}-\sqrt{n^4+1}$ **b)** $\sqrt{n^4+n+1}-n^2$

c) $\dfrac{2^n.n!}{n^n}$ **d)** $\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n(n+1)}$

e) $\dfrac{1}{(\ln n)^5}$ **f)** $(-1)^n \tan\left(\dfrac{1}{n}\right)$

g) $\dfrac{(-1)^n n+\sin n+\cos n}{n\sqrt{n}}$ **h)** $\dfrac{(-1)^n \ln n}{n}$

i) $\dfrac{3^n}{1+4^n}$ **j)** $1-\cos\left(\dfrac{1}{n}\right)$

k) $\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{2n+1}\right)$

Les séries f), g), h), k) sont-elles absolument convergentes ?

Exercice 10 : Etudier les séries de terme général $u_n=\frac{(-1)^n}{n\ln n}$, $v_n=\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$, $w_n=\ln(1+u_n)$, $x_n=\ln(1+v_n)$.

Exercice 11 : Pour tout entier $n>1$, on pose $u_n=\dfrac{1}{n\ln n}$ et $S(n)=\displaystyle\sum_{k=2}^{n} u_k$.

a). Comparer u_k, u_{k+1} et $\displaystyle\int_k^{k+1}\frac{dx}{x\ln x}$. En déduire un encadrement de la forme $S(n)+\alpha_n\leq\displaystyle\int_2^n\frac{dx}{x\ln x}\leq S(n)+\beta_n$, où $(\alpha_n)_{n>1}$ et $(\beta_n)_{n>1}$ sont des suites convergentes.

b) Calculer $\displaystyle\int_2^n\frac{dx}{x\ln x}$.

c) A l'aide de ce qui précède, établir que la série de terme général u_n est divergente, et que $S(n)\sim\ln(\ln n)$ au voisinage de $+\infty$.

d) En reprenant la méthode du **2.a)**, montrer directement que la série de terme général u_n diverge. (On considèrera $v_n=\sum_{k=n}^{na_n} u_k$ pour une suite a_n bien choisie).

Exercice 12 : Soit $x\in\mathbb{R}$ et soient les deux séries de termes généraux respectifs $u_n=x^n$, $v_n=(-1)^n x^n$, $n\geq 0$. Déterminer, en utilisant le résultat de cours, le produit des deux séries, puis vérifier le résultat.

Exercice 13 : a) Soient $x\in]-1,1[$, la série de terme général $u_n(x)=(\cos n)\,x^n$ et sa somme $S(x)=\sum_{k=0}^{\infty}u_k(x)$. Déterminer $S(1/2)$ avec une erreur absolue inférieure à 0.02. Généraliser la méthode pour un x donné.
b) Soit la série de terme général $u_n=\frac{(-1)^n}{n+1}$, $n\geq 0$ et sa somme $S=\sum_{k=0}^{\infty}u_k$. Déterminer S avec une erreur absolue inférieure à 0.1.
Recommencer avec $u_n=\frac{(-1)^n\ln(n+1)}{(n+1)^2}$ et l'erreur <0.02.
c) Justifier la convergence de la série $\arctan x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$, $|x|\leq 1$. Déterminer une valeur approchée de $\arctan(1/5)$ à 10^{-4} près. Combien de termes de la série devrait-on calculer pour obtenir $\arctan 1=\pi/4$ à 10^{-2} près?

Exercice complémentaires

Exercice 14 : Soit x un réel fixé. Etudier suivant les valeurs de x la convergence de la série de terme général n^2x^n.

Exercice 15 : Soit $\sum_n u_n$ une série à termes positifs.

1. On suppose que $\sum_n u_n$ converge. Prouver que, pour tout $\alpha>1$, $\sum_n u_n^\alpha$ converge.
2. On suppose que $\sum_n u_n$ diverge. Prouver que, pour tout $\alpha\in]0,1[$, $\sum_n u_n^\alpha$ diverge.

Exercice 16 : Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite de termes positifs. On pose $p_n=\displaystyle\prod_{k=0}^{n}(1+a_k)$. Montrer que la suite $(p_n)_{n\geq 0}$ converge si et seulement si la série de terme général a_n converge.