TD 2 : Suites et Séries de Fonctions

Suites de Fonctions

Exercice 1 : Soit $f_n(x) = \frac{x}{n}$ si $0 \leq x \leq n$ et $f_n(x) = 0$ si $x > n$, $n \geq 1$.
a) Déterminer la limite simple de la suite $(f_n)_n$.
b) Montrer que la convergence est uniforme sur $[0, a]$, pour tout $a > 0$.
c) Y-a-t-il convergence uniforme sur $\mathbb{R}^+$?
d) Refaire les questions a) $\sim$ c) avec $f_n(x) = \sin(\frac{x}{n})$, puis avec $f_n(x) = x^n$, $x \geq 0$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 2 : Soit $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}}$, $x \in \mathbb{R}$, $n \geq 1$.
a) Déterminer la limite simple de la suite $(f_n)_n$.
b) Montrer que la convergence est uniforme sur $\mathbb{R}$.
c) Que dire de la suite $(f'_n)_n$?
d) Soit $(g_n)_n$ une suite de fonctions réelles convergeant uniformément vers g sur $\mathbb{R}$. Montrer que la suite $(f_n \circ g_n)_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3 : Etudier la convergence simple et uniforme (sur $[a, \infty[$, $a > 0$, puis sur $\mathbb{R}$) de la suite $(f_n)_n$, avec $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$, $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 4 : Etudier la convergence simple et uniforme de la suite $(f_n)_n$, avec
$f_n(x) = (1 + \frac{x}{n})^{-n}\, 1_{[0,n]}(x)$, $x \geq 0$.

Exercices complémentaires (Facultatifs)

Exercice 5 : On pose $f_0(x) = x$ et $f_{n+1}(x) = \frac{1}{2}(f_n(x) + \frac{x}{f_n(x)})$, $x \geq 1$, $n \in \mathbb{N}$.
a) Montrer que pour tout n, f_n est une fraction rationnelle.
b) Etudier la convergence simple et uniforme de la suite $(f_n)_n$ sur $[1, +\infty[$. (On pourra considérer pour la C.U la suite $(g_n)_n$, avec $g_n(x) = \frac{f_n(x)-\sqrt{x}}{f_n(x)+\sqrt{x}}$, $x \geq 1$).

Exercice 6 : On pose $f_0(x) = 0$ et $f_{n+1}(x) = f_n(x) + \frac{1}{2}(x - f_n^2(x))$, $x \in [0, 1]$, $n \in \mathbb{N}$.
a) Montrer que pour tout n, f_n est un polynôme.
b) Etudier la convergence simple et uniforme de la suite $(f_n)_n$.

Exercice 7 : Soit $f_n(x) = (1 - x/n)^n\, 1_{[0,n]}(x)$, $x \geq 0$, $n \geq 1$.
a) Déterminer la limite simple f de la suite $(f_n)_n$, et montrer que $0 \leq f_n \leq f$.
b) Montrer que la convergence est uniforme sur $\mathbb{R}^+$ (commencer d'abord sur un borné).

Exercice 8 :
Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $f_n(x) = n^\alpha x(1 - x)^n$ pour $x \in [0, 1]$, $n \geq 1$.
a) Déterminer la limite simple de la suite $(f_n)_n$.
b) Y a-t-il convergence uniforme?

Exercice 9 : On pose $f_0(x) = 0$ et $f_{n+1}(x) = \sqrt{x + f_n(x)}$, $x \in \mathbb{R}^+$, $n \in \mathbb{N}$.
a) Déterminer la limite simple, f, de la suite $(f_n)_n$.
b) Y a–t–il convergence uniforme sur $\mathbb{R}^+$?

Séries de Fonctions

Exercice 10 : Convergence simple et uniforme de la série $f(x) = \sum_{n\geq 0} ne^{-nx}$? Déterminer $f(x)$ quand il y a convergence. (Indic: déterminer la série produit de $\left(\sum_{n\geq 0} q^n\right)^2$, $0 \leq q < 1$).

Exercice 11 : Etudier la convergence simple, uniforme et normale des séries de fonctions de terme général $f_n(x) = \frac{1}{x^2+n^2}$, $g_n(x) = \frac{(-1)^n}{n+x^2}$, $h_n(x) = \frac{1}{n}\sin(\frac{x}{n})$, $x \in \mathbb{R}$, $u_n(x) = \frac{\sin(nx)}{1+n^2x^2}$, $x > 0$, $v_n(x) = \chi_{[n,n+1[}(x)$ sur $\mathbb{R}^+$, puis leur continuité sur leur domaine de convergence simple.

Exercice 12 : a) Convergence simple et uniforme de la série $f(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{1+x^n}$, $x \geq 0$?
b) Montrer que f est C^1 sur $]0, +\infty[$. Graphe de f sur $]0, +\infty[$?

Exercice 13 : Soit $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-x\sqrt{n}}$.
a) Quel est le domaine de définition de f? Etudier la continuité de f sur celui-ci.
b) Montrer que f est strictement décroissante.
c) Etudier les limites de f en $+\infty$ et en 0^+.

Exercice 15 : Pour $x > 0$, on pose $S(x) = \sum_{n\geq 1} \frac{(\cos x)^n \sin(nx)}{n}$.
a) Justifier que S est définie sur $\mathbb{R}$ et π-périodique.
b) Montrer que S est C^1 sur $]0, \pi[$ et calculer sa dérivée. En déduire une expression de S sur $[0, \pi]$.

Exercices complémentaires (Facultatifs)

Exercice 16 : Sur $I =]-1, +\infty[$, on pose $S(x) = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n} - \frac{1}{n+x}$.
a) Montrer que S est définie et continue sur I.
b) Etudier la monotonie de S.
c) Calculer $S(x+1) - S(x)$.
d) Déterminer un équivalent de $S(x)$ en -1^+.
e) Etablir: $\forall n \in \mathbb{N}$, $S(n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.
f) En déduire un équivalent de S en $+\infty$.

Exercice 17 : Pour $x > 0$, on pose $S(x) = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n+n^2x}$.
a) Montrer que S est définie et continue sur $\mathbb{R}^{+*}$.
b) Etudier la monotonie de S.
c) Déterminer la limite en $+\infty$ de S puis un équivalent de S en $+\infty$.
d) Déterminer un équivalent à S en 0.

Exercice 18 : Pour $x > 0$, on pose $S(x) = \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n+x}$.
a) Justifier que S est définie et de classe C^1 sur $\mathbb{R}^{+*}$.
b) Préciser le sens de variation de S.
c) Etablir : $\forall x > 0$, $S(x+1) + S(x) = 1/x$.
d) Donner un équivalent de S en 0.
e) Donner un équivalent de S en $+\infty$.