Aix-Marseille Université - PEIP **Année 2013/2014**
Licence Math. - Info. – Semestre 3 L2 - Mathématiques

TD 3 : Séries Entières

Exercice 1 : Fonction exponentielle. Rappel: on pose

$$exp(z) = e^z := \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad \cos z = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}), \quad \sin z = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz}) \quad z \in \mathbb{C},$$

1) Révision de cours. Démontrer les formules

$$e^{z+z'} = e^z e^{z'}, \quad \frac{\mathrm{d}e^z}{\mathrm{d}z} = e^z, \quad \frac{\mathrm{d}\cos z}{\mathrm{d}z} = -\sin z, \quad \frac{\mathrm{d}\sin z}{\mathrm{d}z} = \cos z, \quad \cos^2 z + \sin^2 z = 1.$$

En déduire $|e^z|$ en fonction de $\Re ez$, puis $|e^{ix}|$ pour x réel.
2) Pour $x \in \mathbb{R}$ vérifier que $exp(x)$, $\cos x$, $\sin x$ sont réels et indéfiniment dérivables en x. Montrer que exp réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $]0, +\infty[$.
3) On suppose que $\cos x > 0$ pour tout $x \geq 0$. Montrer alors que $\sin x$ tend vers une limite $l \in]0, 1]$ et que $\sin x < l$ pour tout $x \geq 0$. En considérant $f(x) = \cos x + lx/2$ et $\lim_{x\to\infty} f(x)$, montrer une contradiction.
4) On pose $m = \inf\{x > 0, \cos x = 0\}$. Que vaut e^{im}? e^{2im}? Montrer que m est le plus petit réel strictement positif tel que $2im$ soit période de e^z.
5) On pose $\pi = 2m$. Résoudre les équations suivantes: a) $e^z = 0$. b) $e^z = 1$. c) $\sin z = 2$.

Exercice 2 : Déterminer les rayons de convergence des séries entières $\sum_n a_n z^n$ dans les cas suivants. On justifiera le résultat.

1. a) $a_n = \ln n$. b) $a_n = \ln(2n + 1)$. c) $a_n = n^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$ fixé.
2. $a_n = 4^{2n-5}$. Déterminer ensuite la somme $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$.
3. $a_n = 2^n$ si n pair et $a_n = 0$ si n impair. Déterminer $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$.
4. $a_n = \sin(1/n)$.
5. $a_n = \tan(1/n) - \sin(1/n)$.
6. $a_n = (-2n)^{n+2}$.
7. $a_n = \cos(4n\pi/3)$. Déterminer ensuite la somme $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$.
8. $a_n = 3^n/n!$. Déterminer ensuite la somme $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$.
9. $a_{2k} = (-2)^k$ et $a_{2k+1} = 3^k$, $\forall k \in \mathbb{N}$. Déterminer ensuite la somme $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$.

Exercice 3 : Résoudre l'équation différentielle (E): $x^2 y'' + 4x^2 y' + 5y = 3 - 2x$, $x \in \mathbb{R}$, avec les conditions au bord $y(0) = y'(0) = 1$, en cherchant une solution sous la forme d'une série entière.

Exercice 4 : Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n(z) = (1 + z/n)^n$ pour $z \in \mathbb{C}$. Montrer que $u_n(z)$ est développable en série entière et calculer ce développement (on utilisera la formule du binôme).

Exercice 5 : Soit $f(x) = (\cos x) \exp(x)$, $x \in \mathbb{R}$.
1) Expliquer pourquoi f possède en $x = 0$ un D.S.E (développement en série entière).
2) Montrer que f est solution d'une certaine équation différentielle linéaire homogène du 2^{eme} ordre à coefficients constants (E).
3) Déterminer les séries entières $S(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$ solutions de (E) par la relation entre a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, pour tout $n \geq 0$.
4) En utilisant la formule d'Euler pour $\cos x$, déterminer les coefficients f_n de la série entière $f(z) = \sum_{n\geq 0} f_n z^n$. Vérifier que f_n satisfait la relation de récurrence trouvée au 3).

Exercice 6 : Déterminer le développement de Taylor en $x = 0$ à un ordre quelconque de la fonction réelle $f(x) = \exp(-1/x^2)$ (que l'on prolongera par continuité en 0). La fonction f est-elle développable en série entière?