TD 4 : Intégrales

Intégrales classiques

Exercice 1 : a) Soit $f = \chi_Q$ i.e, $f(x) = 1$ si $x \in \mathbb{Q}$ et $f(x) = 0$ sinon. Déterminer, pour toute subdivision $0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_{N-1} < x_N = 1$, les valeurs $M_i = \sup f|_{]x_i,x_{i+1}[}$ et $m_i = \inf f|_{]x_i,x_{i+1}[}$, $i = 0, \ldots, N$.
b) En déduire que f n'est pas Riemann-intégrable sur $[0, 1]$.

Exercice 2 : Donner un exemple de fonction bornée et continue sur $]0, 1]$, et non prolongeable par continuité en 0. Montrer qu'une telle fonction (avec une valeur attribuée arbitraire en 0) est Riemann-intégrable sur $[0, 1]$.

Exercice 3 : En utilisant une somme de Riemann, déterminer $\lim_{n\to+\infty} S_n$ où

$$S_n = \frac{2\pi}{n} \sum_{k=0}^{n} \cos^2\left(\frac{2k\pi}{n}\right).$$

Exercice 4 : a) Soit $f \in C^1([a, b])$. Montrer: $\int_a^b f(x)e^{i\lambda x}dx \to 0$ quand $\lambda \to \pm\infty$.
b) Recommencer avec l'hypothèse que f en escalier sur $[a, b]$. En déduire que pour toute fonction f Riemann–intégrable sur $[a, b]$, on a

$$\int_a^b f(x)e^{i\lambda x}dx \to 0 \quad \text{quand } \lambda \to \pm\infty.$$

Exercice 5 : En utilisant $\ln(1 + x) = \int_0^x dt/(1 + t)$, obtenir le développement en série entière

$$\ln(1 + x) = \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}, \quad |x| < 1.$$

Exercice 6 : Déterminer pour $a > 1$ et $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| = 1$, $z \neq 1$, l'intégrale complexe

$$I(a) = \int_{t=1}^{a} \frac{dt}{t(t - z)}.$$

Déterminer la limite de $I(a)$ quand $a \to +\infty$.

Intégrales Généralisées

Exercice 7 : Soit f définie sur $[a, +\infty[$, localement intégrable, positive et décroissante. Montrer que f est intégrable sur $[a, +\infty[$ si et seulement si la série $\sum_{n\geq a} f(n)$ est convergente.

Exercice 8 : Soit $I(z) = \int_0^\infty x^z e^{-x}dx$, $z \in \mathbb{C}$. Déterminer l'ensemble de définition de I. Montrer que $I(n) = n!$ pour tout entier n.

Exercice 9 : Donner une minoration de $\int_{k\pi}^{k\pi+\pi}(|\sin x|/x)dx$, $k \in \mathbb{N}$. En déduire que l'intégrale généralisée $\int_0^\infty(\sin x/x)dx$ n'est pas absolument convergente. Montrer qu'elle est semi–convergente.

Exercice 10 : Déterminer la convergence simple ou absolue des intégrales généralisées suivantes, où $a \geq 0$ est un paramètre :

a) $\displaystyle\int_0^{\pi} x^{-a}\sin x dx$,

b) $\displaystyle\int_{\pi}^{+\infty} x^{-a}\sin x dx$ (pour la convergence simple, penser à des intégrations par parties).

Intégrales dépendant d'un paramètre

Exercice 11 : Soit $F(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{(t^2+1)(t^2+x^2)}$.

1) Montrer que $F(x)$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

2) Montrer que pour $x \neq 1$, $F(x) = \dfrac{1}{x^2-1}\left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{1}{x}\arctan\dfrac{1}{x}\right)$.

3) En déduire que $F(1) = \pi/8 + 1/4$.

Exercice 12 : Soit $F_n(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{(t^2+x^2)^n}$, $n \geq 1$, $x \neq 0$.

1) Montrer que F_n est continue et dérivable sur $\mathbb{R}^*$.

2) Donner une expression de $F_n'(x)$ et en déduire qu'on peut calculer les F_n par récurrence.

Exercice 13 : On pose $F(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-x^2+ikx)dx$, $k \in \mathbb{R}$.

1) Montrer que $F(k)$ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $F'(k) = -(k/2)F(k)$.

2) En déduire $F(k)$, en admettant que $\int_{\mathbb{R}} \exp(-x^2)dx = \pi$.

Exercice 14 : Soit $f(x) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{-x\sin t}dt$.

1) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

2) Montrer que f est dérivable deux fois sur $\mathbb{R}$ et donner des expressions intégrales de f' et de f''.

3) Montrer que $xf'' + f' - xf = 0$ (faire une intégration par parties dans l'expression de f).

Exercice 15 : Soit $f(x) = \int_0^{\pi} \sqrt{|1 - x\cos t|}dt$.

1) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

2) Etudier la parité de f.

3) Calculer $f'(x)$ sur $]-1,1[$. (On pourra poser $y = \tan(\frac{t}{2})$).

4) Montrer que f est deux fois dérivable sur $]-1,1[$ et qu'elle satisfait

$$4x(x^2-1)f''(x) + 4(x^2-1)f'(x) - xf(x) = \int_0^{\pi} R(t,x)dt, \text{ où } R(t,x) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{2\sin t}{\sqrt{|1-x\cos t|}}\right).$$

5) En déduire que f satisfait l'équation différentielle

$$4x(x^2-1)y''(x) + 4(x^2-1)y'(x) - xy(x) = 0.$$

Exercice 16 : Soit $F(x) = \int_{-\pi}^{\pi} \ln(1 + x^2 - 2x\cos t)dt$.

1) Déterminer le domaine de définition de F puis montrer que F est continue et dérivable sur $I =]-1,1[$.

2) Calculer $F'(x)$ sur $]-1,1[$ (on pourra poser $y = \tan(t/2)$) puis en déduire $F(x)$ sur I.