
**RÉSUMÉ DÉTAILLÉ DE MA THÈSE INTITULÉE
« SEMI-GROUPES DE MATRICES ET APPLICATIONS »**

par

Paul MERCAT

Table des matières

1. Introduction.....	1
2. Semi-groupes d'isométries d'un espace Gromov-hyperbolique....	7
3. Semi-groupes de développement en base β	13
4. Construction de fractions continues périodiques uniformément bornées.....	17
Références.....	20

1. Introduction

1.1. Déroulement de la thèse. — À la suite des mes travaux sur les fractions continues réalisés en stage de M2, il est apparu que les questions auxquelles je m'étais intéressé se ramènent à étudier certains semi-groupes de matrices. C'est pourquoi Yves Benoist m'a proposé de travailler sur le sujet « Semi-groupes de matrices et applications », avec comme idée générale d'adapter aux semi-groupes les nombreux outils qui existent pour les groupes.

J'ai commencé ma thèse en étudiant la très jolie théorie de Patterson-Sullivan, qui établit des liens entre des données géométriques et des données dynamiques sur les groupes discrets. Je me suis attelé à généraliser cette théorie pour les semi-groupes. Dans ce but, j'ai considéré de nombreux exemples. Un des exemples s'est avéré particulièrement intéressant : il s'agit des semi-groupes de développement en base β , pour lesquels j'ai découvert des propriétés algébriques, géométriques, combinatoires et algorithmiques. Je suis finalement parvenu à généraliser un théorème de Patterson-Sullivan aux semi-groupes, tout en obtenant des corollaires intéressants dans le cadre général des espaces Gromov-hyperboliques. Parallèlement à ces travaux, j'ai découvert par hasard un nouveau résultat inattendu sur les fractions continues.

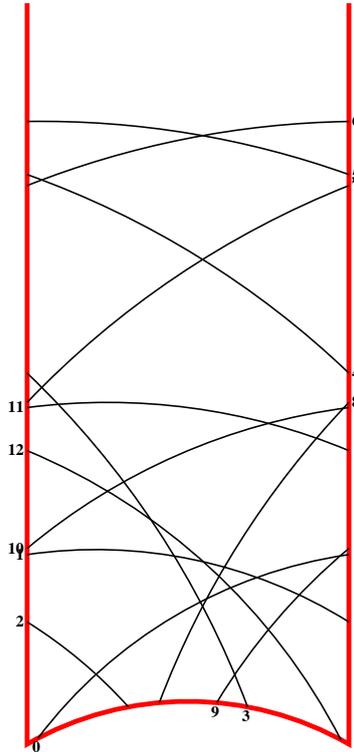
1.2. Motivations et survol. — Un des aspects magnifiques des mathématiques est le rapprochement de domaines qui n'avaient à priori rien à voir. Dans cette thèse, nous faisons des liens entre les fractions continues, les semi-groupes, la géométrie hyperbolique, la géométrie euclidienne, l'informatique, la théorie des nombres et la combinatoire. Précisons ces liens.

1.2.1. Fractions continues. — Les **fractions continues** sont une façon assez naturelle de représenter les nombres réels par des suites d'entiers, en les écrivant sous la forme

$$a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \frac{1}{a_4 + \frac{1}{\ddots}}}}}$$

que l'on note $[a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, \dots]$.

FIGURE 1. Interprétation géométrique des fractions continues : enroulement d'une géodésique sur la surface modulaire



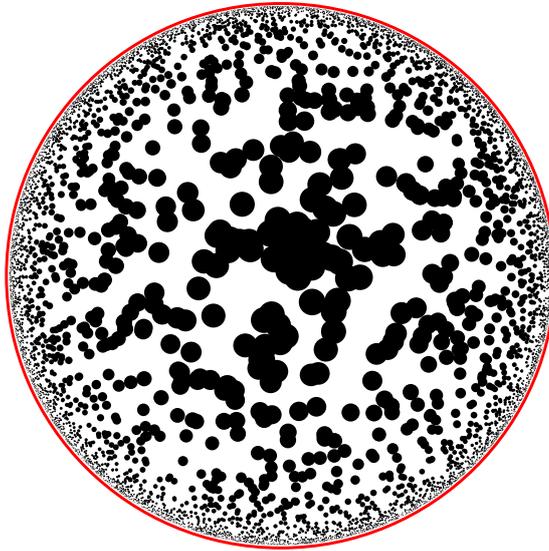
Et le même semi-groupe permet aussi d'étudier les fractions continues bornées finies puisque l'on a l'équivalence

$$\begin{array}{c} \updownarrow \\ \left(\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ 1 & a_1 \end{array} \right) \left(\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ 1 & a_2 \end{array} \right) \cdots \left(\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ 1 & a_k \end{array} \right) = \begin{pmatrix} * & p \\ * & q \end{pmatrix} \\ \frac{q}{p} = [a_1, a_2, \dots, a_k], \end{array}$$

Les matrices $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & i \end{pmatrix}$ appartiennent au groupe $GL_2(\mathbb{Z})$, qui agit sur l'espace hyperbolique $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2$. Cela motive l'étude des isométries d'un espace hyperbolique.

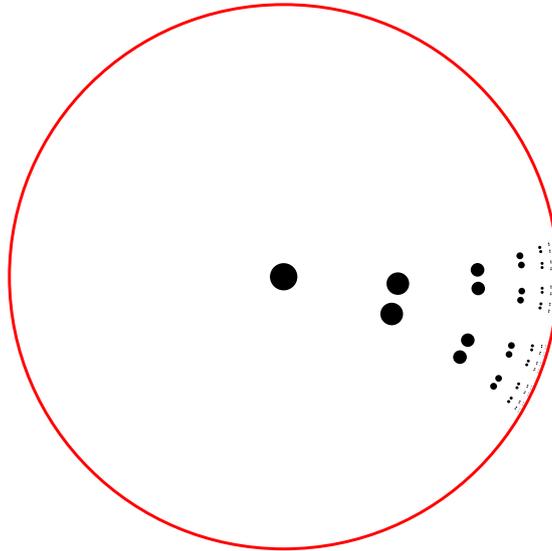
1.2.2. Semi-groupes d'isométries d'espaces Gromov-hyperboliques. — Un des premiers exemples d'espace hyperbolique est le disque de Poincaré. C'est le premier exemple de géométrie où l'axiome des parallèles d'Euclide n'est pas vérifié.

FIGURE 2. Ronds hyperboliques de mêmes taille dans le disque de Poincaré



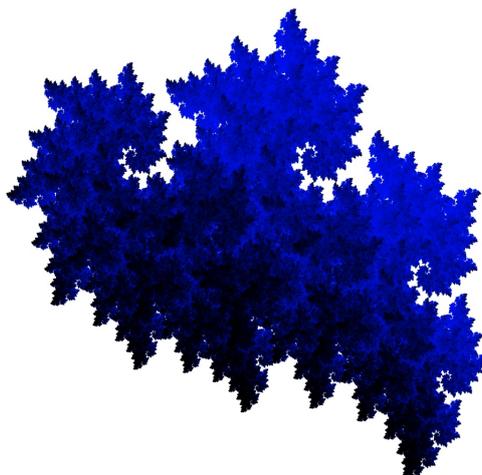
Etant donné un semi-groupe d'isométries d'un espace hyperbolique, on s'intéresse à l'orbite d'un point.

FIGURE 3. Orbite d'une boule sous l'action d'un semi-groupe d'isométries



On définit alors l'**exposant critique** du semi-groupe comme étant l'exposant de croissance exponentielle de cette orbite. Pour un groupe discret de $SL(2, \mathbb{R})$, il s'agit d'un nombre entre 0 et 1. On définit aussi l'**ensemble limite** comme l'ensemble des points d'accumulation au bord de l'espace hyperbolique de l'orbite d'un point. Pour un sous-semi-groupe de $SL(2, \mathbb{R})$, l'ensemble limite est une partie du cercle $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$.

FIGURE 4. Ensemble limite d'un sous-semi-groupe de $SL(2, \mathbb{C})$ agissant par homographie sur la sphère de Riemann $\hat{\mathbb{C}}$.



Le théorème de Patterson-Sullivan affirme que l'exposant critique d'un groupe discret est égal à la dimension de Hausdorff de l'ensemble limite. J'ai introduit une nouvelle façon de mesurer la vitesse de croissance, qui généralise l'exposant critique des groupes discrets, et qui permet d'obtenir la généralisation aux semi-groupes de ce théorème. Ma preuve permet d'obtenir des corollaires intéressants, tels que l'existence de « gros » sous-semi-groupes de Schottky (qui sont les semi-groupes ayant la dynamique la plus simple), la semi-continuité inférieure et une caractérisation de l'exposant de croissance, et l'existence de « gros » sous-groupes de Schottky dans les groupes discrets.

FIGURE 5. Action de $SL(2, \mathbb{Z})$ sur le disque de Poincaré

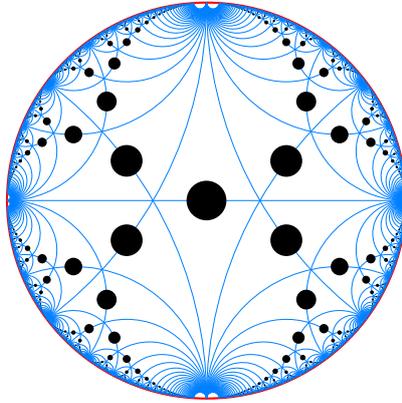
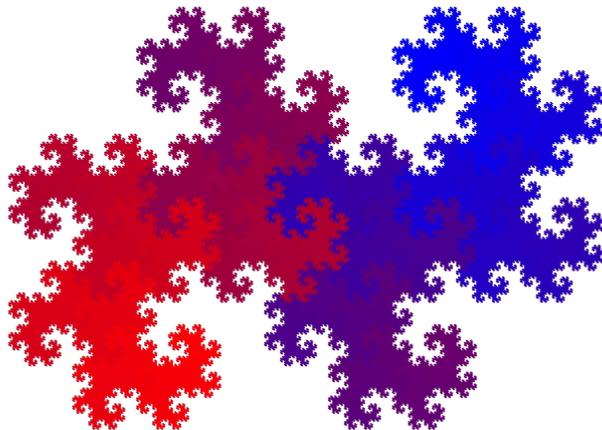


FIGURE 6. Ensemble limite du semi-groupe de développement en base $\beta = 1 + i$, avec ensemble de chiffres $A = \{0, 1\}$.



1.2.3. *Semi-groupes de développement en base β .* — Un exemple de semi-groupes d'isométries de l'espace hyperbolique $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^3$ de dimension 3 est donné par les semi-groupes de développement en base β .

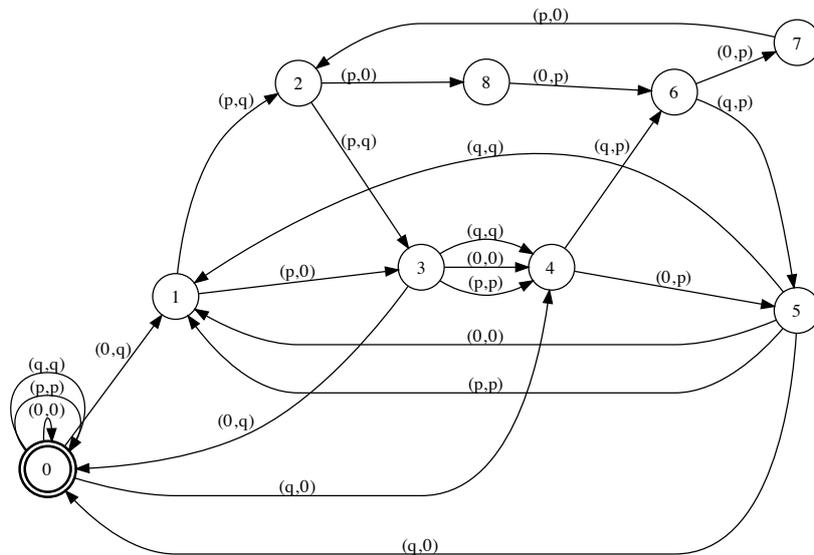
Le **semi-groupe de développement en base β** avec ensemble de chiffres A est le semi-groupe engendré par les applications

$$x \mapsto x/\beta + a, \quad a \in A$$

où β est un nombre complexe, et $A \subset \mathbb{C}$ est un ensemble fini de chiffres.

Nous montrons que la combinatoire de chacun de ces semi-groupes est presque toujours complètement décrite par un automate fini. Un automate fini est une machine qui effectue des calculs avec une mémoire finie et en temps linéaire. On peut le représenter par un graphe orienté et étiqueté. Voir la figure 7 pour un exemple.

FIGURE 7. Automate fini correspondant au développement en base π avec ensemble de chiffres $\{0, \pi, \pi^2 + 1\}$



En plus de donner une nouvelle application à la théorie des nombres, ces semi-groupes fournissent des exemples pour lesquels je sais calculer la valeur exacte de l'exposant critique, grâce à ces automates finis.

Détaillons maintenant les résultats de ma thèse. Ma thèse s'organise en trois chapitres qui sont indépendants mais reliés entre eux.

2. Semi-groupes d'isométries d'un espace Gromov-hyperbolique

Dans ce chapitre, nous présentons les travaux réalisés afin de généraliser le théorème de Patterson-Sullivan, que nous énonçons ici pour $SL(2, \mathbb{R})$:

Théorème 2.1 (Patterson-Sullivan). — Soit Γ un sous-groupe discret de $SL(2, \mathbb{R})$ non élémentaire et de type fini. Alors on a l'égalité

$$\delta_\Gamma = \dim_H(\Lambda_\Gamma).$$

Nous sommes parvenu à le généraliser aux semi-groupes convexes-co-compact, dans le cadre général des espaces Gromov-hyperboliques.

Précisons les définitions

2.1. Espaces hyperboliques. — Dans toute la suite, (X, d) sera un espace métrique, et o est un point de X .

Définitions 2.2. — On appelle **produit de Gromov** de deux points $x, y \in X$ le réel

$$(x|y) := \frac{1}{2} (d(x, o) + d(y, o) - d(x, y)).$$

On peut alors définir la Gromov-hyperbolicité :

Définitions 2.3. — On dit que l'espace X est δ -**hyperbolique** pour un réel $\delta \geq 0$, s'il vérifie l'inégalité

$$(x|z) \geq \min\{(x|y), (y|z)\} - \delta$$

pour tous x, y et $z \in X$.

On dit que l'espace X est **Gromov-hyperbolique** s'il existe un réel δ tel que l'espace X est δ -hyperbolique.

Un espace Gromov-hyperbolique est un espace qui ressemble, vu de loin, à un arbre. Les arbres sont d'ailleurs des espaces 0-hyperboliques. Dans un espace hyperbolique, un grand produit de Gromov caractérise des points qui sont « proches vus de o ».

Définissons l'exposant critique. Il s'agit de la vitesse exponentielle de croissance d'une partie du groupe $\text{Isom}(X)$ d'isométries de X .

Définitions 2.4. — On appelle **exposant critique** d'une partie $P \subset \text{Isom}(X)$, le réel (éventuellement infini)

$$\delta_P := \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log(\#\{\gamma \in P \mid \gamma o \in B(o, n)\}).$$

Nous introduisons une autre façon de mesurer la vitesse de croissance, qui consiste à regarder le volume occupé par l'orbite d'une boule. Ceci nous donne la définition ci-dessous d'entropie, qui sera la bonne notion pour généraliser le théorème de Patterson-Sullivan.

Définitions 2.5. — On dit qu'une partie $P \subseteq \text{Isom}(X)$ est **séparée** s'il existe un réel $\epsilon > 0$ tel que pour tous $\gamma \neq \gamma' \in P$, on ait $d(\gamma o, \gamma' o) \geq \epsilon$.

On dit qu'une partie $P \subseteq \text{Isom}(X)$ est une partie **couvrante** de $Y \subseteq \text{Isom}(X)$ s'il existe un réel $\epsilon > 0$ tel que pour tout $\gamma \in Y$, il existe $\gamma' \in P$ tel que l'on ait $d(\gamma o, \gamma' o) < \epsilon$.

Définitions 2.6. — On appelle *entropie* d'une partie $P \subseteq \text{Isom}(X)$, le réel (éventuellement infini)

$$h_P := \sup_S \delta_{P \cap S},$$

où la borne supérieure est prise sur les parties S séparées de $\text{Isom}(X)$.

Notation . — On notera ∂X le bord de l'espace hyperbolique X , et \bar{X} l'union $X \cup \partial X$.

L'espace \bar{X} est muni d'une topologie naturelle dont une base de voisinages est donnée par les boules ouvertes de X et les boules

$$\beta(\xi, r) := \{x \in \bar{X} \mid |x\xi| > -\log(r)\},$$

pour les points $\xi \in \partial X$.

Voir [17] pour plus de détails sur les espaces Gromov-hyperboliques.

Définitions 2.7. — On dit qu'une partie $A \subseteq X$ d'un espace métrique X est une *sous-quasi-géodésique* s'il existe une constante C telle que l'on ait

$$d(x, y) + d(y, z) \leq d(x, z) + C$$

pour tous x, y et z dans A tels que $\max\{d(x, y), d(y, z)\} \leq d(x, z)$.

Définissons maintenant l'ensemble limite :

Définitions 2.8. — On appelle *ensemble limite* d'une partie $P \subseteq \text{Isom}(X)$, l'ensemble

$$\Lambda_P := \bar{Po} \cap \partial X.$$

On appelle *ensemble limite radial* (ou conique) d'une partie $P \subseteq \text{Isom}(X)$, l'ensemble

$$\Lambda_P^c := \left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \mid (x_i) \in (\Gamma o)^\mathbb{N} \text{ est convergente et est une sous-quasi-géodésique} \right\} \subseteq \Lambda_P.$$

Quand l'espace est géodésique, les points de l'ensemble limite conique sont les points d'accumulation de l'orbite Po obtenus en longeant une géodésique.

2.2. Résultats obtenus. — Nous avons généralisé le théorème de Patterson-Sullivan pour les semi-groupes convexes co-compacts (c'est-à-dire pour lesquels $\Lambda_\Gamma = \Lambda_\Gamma^c$) :

Théorème 2.9. — Soit X un espace Gromov-hyperbolique propre à bord compact et soit Γ un semi-groupe d'isométries de X dont l'ensemble limite contient au moins deux points. Alors on a l'égalité

$$\dim_{\text{vis}}(\Lambda_\Gamma^c) = h_\Gamma.$$

Dans le cas des groupes, et avec des hypothèses supplémentaires, c'est un théorème de F. Paulin.

Nous démontrons cette généralisation du théorème de Patterson-Sullivan-Paulin en démontrant les résultats suivant :

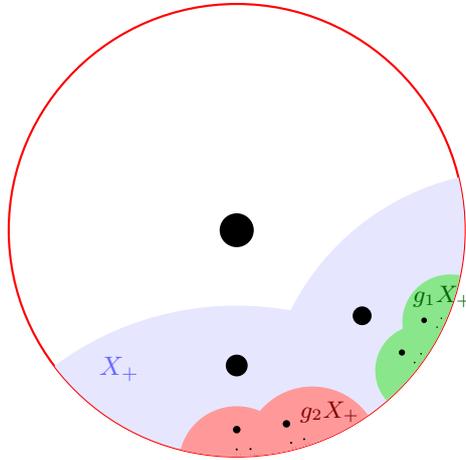
Théorème 2.10. — Soit X un espace Gromov-hyperbolique propre à bord compact, et soit Γ un semi-groupe d'isométries de X dont l'ensemble limite Λ_Γ contient au moins deux points. Alors il existe un sous-semi-groupe Γ' de Γ , contractant et de même entropie :

$$h_{\Gamma'} = h_\Gamma.$$

Théorème 2.11. — Soit X un espace Gromov-hyperbolique propre, et soit Γ un semi-groupe d'isométries de X . Si le semi-groupe Γ est contractant, alors pour tout $\epsilon > 0$, il existe un sous-semi-groupe Schottky $\Gamma' \subseteq \Gamma$ tel que $\delta_{\Gamma'} \geq h_\Gamma - \epsilon$.

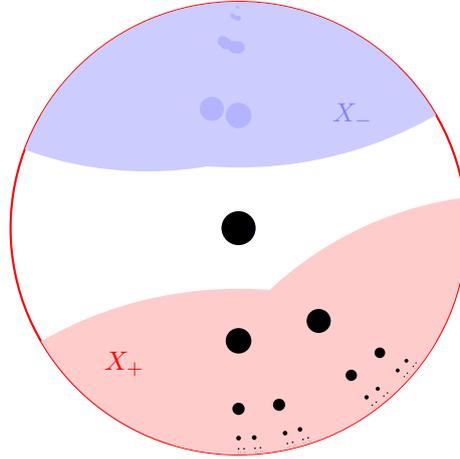
Les semi-groupes de Schottky sont les semi-groupes ayant la dynamique la plus simple. Ce sont des semi-groupes engendrés par un ensemble fini d'éléments qui jouent au « ping-pong ». C'est-à-dire qu'il existe une partie $X_+ \subset X$ et un ensemble de générateurs g_1, g_2, \dots, g_n tels que les ensembles $g_1 X_+, g_2 X_+, \dots, g_n X_+$ et $X \setminus X_+$ sont d'adhérences dans \bar{X} disjointes.

FIGURE 8. Un semi-groupe de Schottky engendré par deux isométries g_1 et g_2



L'ensemble des semi-groupes contractants est une classe un peu plus large de semi-groupes pour lesquels la dynamique est un ping-pong entre deux ensembles. C'est-à-dire qu'il existe deux parties X_+ et X_- d'adhérences dans \bar{X} disjointes, et telles que pour tout élément γ du semi-groupe on ait $\gamma(X \setminus X_-) \subseteq X_+$.

FIGURE 9. Un semi-groupe contractant.



Idée de preuve du théorème 2.10. — Le théorème 2.10 est l'étape principale pour construire des sous-semi-groupes de Schottky d'exposant critique arbitrairement proche de l'entropie. L'idée est d'utiliser le principe du « ping-pong », en contrôlant où sont les points fixes attracteurs et répulseurs des isométries du semi-groupe Γ grâce au support, que je défini comme suit :

$$\text{supp}(\Gamma) := \{(\xi, \eta) \in \partial X \times \partial X \mid \text{pour tout } \epsilon > 0, h_{\Gamma^{\beta(\xi, \epsilon)} \times \beta(\eta, \epsilon)} = h_{\Gamma}\},$$

où $\Gamma^{\beta(\xi, \epsilon) \times \beta(\eta, \epsilon)} := \{\gamma \in \Gamma \mid \gamma o \in \beta(\xi, \epsilon) \text{ et } \gamma^{-1} o \in \beta(\eta, \epsilon)\}$. On démontre alors les lemmes suivants :

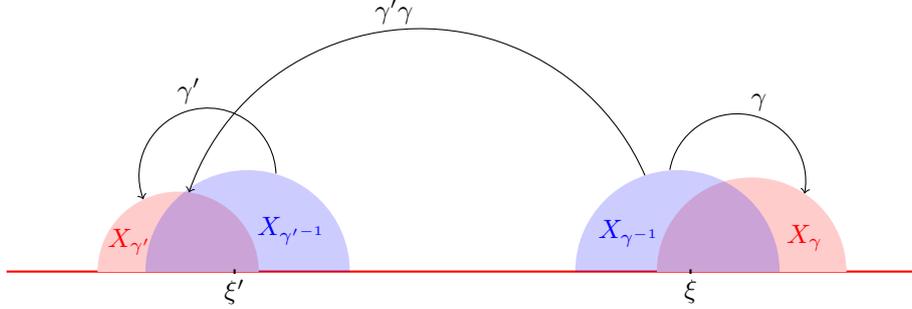
Lemme 2.12. — *Le support est $\Gamma \times \Gamma^{-1}$ -invariant. C'est-à-dire que pour tout $(\gamma, \gamma') \in \Gamma \times \Gamma$, et tout $(\xi, \eta) \in \text{supp}(\Gamma)$, on a $(\gamma\xi, \gamma'^{-1}\eta) \in \text{supp}(\Gamma)$.*

Lemme 2.13. — *Le support est non vide si l'espace X est propre et à bord compact.*

Lemme 2.14. — *Si le support n'est pas inclut dans la diagonale de $\partial X \times \partial X$, alors il existe un sous-semi-groupe Γ' de Γ qui est contractant et avec $h_{\Gamma'} = h_{\Gamma}$.*

Lemme 2.15. — *Γ contient une isométrie contractante dès que son ensemble limite contient au moins deux points.*

FIGURE 10. Construction d'une isométrie contractante à partir de deux isométries γ et γ' non contractantes.



Lemme 2.16. — *Si l'ensemble limite contient au moins trois points, alors le support n'est pas inclus dans la diagonale.*

On se ramène ensuite aux semi-groupes fixant un point point au bord, pour lesquels nous développons un argument de type différent. □

Voici des corollaires des théorèmes 2.10 et 2.11. On obtient une caractérisation de l'entropie, où l'on montre que l'on peut remplacer la limite supérieure par une vraie limite :

Corollaire 2.17. — *Soit X un espace Gromov-hyperbolique propre, et soit Γ un semi-groupe d'isométries de X dont l'ensemble limite contient au moins deux points. Alors on a*

$$h_{\Gamma} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log(\#\{\gamma \in S \mid d(o, \gamma o) \leq n\}),$$

pour toute partie S séparée et couvrante de Γ .

Nous montrons aussi la continuité inférieure de l'entropie, comme conséquence de la continuité de l'exposant critique en les semi-groupes de Schottky :

Corollaire 2.18. — *Soit $(\Gamma_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de semi-groupes d'isométries d'un espace Gromov-hyperbolique propre à bord compact X qui converge vers un semi-groupe Γ dont l'ensemble limite contient au moins deux points. Alors on a l'inégalité*

$$h_{\Gamma} \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} h_{\Gamma_n}.$$

Autrement dit, l'entropie est semi-continue inférieurement en les semi-groupes dont l'ensemble limite contient au moins deux points.

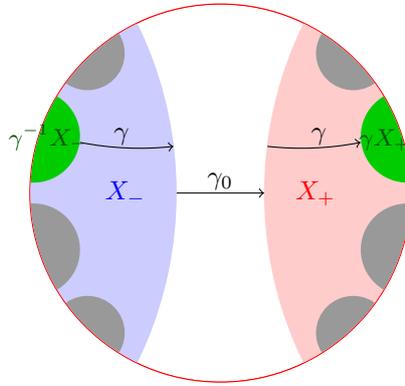
Et nous parvenons à reconstruire des groupes Schottky à partir de semi-groupes de Schottky, ce qui nous donne le résultat suivant :

Corollaire 2.19. — Soit X un espace Gromov-hyperbolique propre et soit Γ un groupe discret et sans torsion d'isométries de X ne fixant pas de point au bord, alors on a

$$\sup_{\substack{\Gamma' < \Gamma \\ \Gamma' \text{ groupe de Schottky}}} \delta_{\Gamma'} \geq \frac{1}{2} \delta_{\Gamma},$$

où la borne supérieure est prise sur l'ensemble des sous-groupes de Schottky du groupe Γ .

FIGURE 11. Construction d'un groupe de Schottky à partir d'un semi-groupe de Schottky dont l'inverse est aussi un semi-groupe de Schottky.



Ce dernier corollaire est à relier à un théorème de Doyle qui affirme que l'on ne peut pas remplacer le coefficient $\frac{1}{2}$ par 1 quand les groupes de Schottky le sont au sens classique (c'est-à-dire qu'ils jouent au ping-pong avec des demi-espaces) :

Théorème 2.20 (Doyle). —

$$\sup\{\delta_{\Gamma} \mid \Gamma \text{ sous-groupe de Schottky classique de } \text{Isom}(\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^3)\} < 2.$$

C'est une question ouverte quand on remplace les groupes de Schottky classiques par des groupes de Schottky généraux.

3. Semi-groupes de développement en base β

Considérons le monoïde Γ , de développement en base 3, engendré par les trois transformations affines :

$$\begin{cases} 0 : x \mapsto x/3, \\ 1 : x \mapsto x/3 + 1, \\ 3 : x \mapsto x/3 + 3. \end{cases}$$

Par définition, c'est le plus petit semi-groupe contenant ces trois applications et l'identité, et l'on peut le voir comme le sous-monoïde de $SL(2, \mathbb{R})$ engendré par les matrices

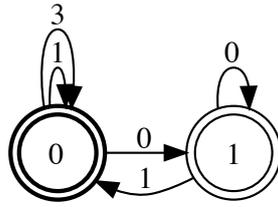
$$\begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & k\sqrt{3} \\ 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix}, \text{ pour } k \in \{0, 1, 3\}.$$

Voici quelques questions que l'on peut se poser :

- Quel est l'exposant critique de ce semi-groupe ?
- Quel est l'asymptotique du nombre d'éléments pour la longueur des mots ?
- Comment peut-on déterminer si deux mots en les générateurs représentent le même élément du semi-groupe ?
- Y a-t'il une façon de représenter les éléments du semi-groupe par des mots uniques particuliers (que l'on appellera mots réduits, ou encore forme normale) ?

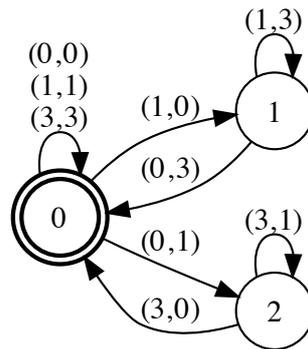
La réponse à ces questions est donnée par la structure automatique du semi-groupe. Celle-ci est donnée par des automates tels que l'on peut en voir sur les figures suivantes

FIGURE 12. Automate reconnaissant un ensemble de mots réduits du semi-groupe. Les mots réduits sont ici les mots minimaux pour l'ordre lexicographique inverse, avec $0 < 1 < 3$.



On appelle **mots réduits** un choix de représentants uniques pour les éléments du semi-groupe par des mots en les générateurs. On voit sur l'automate de la figure 12 que les mots réduits sont ici exactement les mots ne contenant pas le mot 03.

FIGURE 13. Automate reconnaissant les relations du semi-groupe.



On voit sur l'automate de la figure 13 que les relations du semi-groupe Γ s'obtiennent toutes à partir des relations $11^n 0 = 03^n 3$, par concaténation.

Exemple 3.1. — Le mot $(1, 0)(1, 3)(0, 3)$ est reconnu par l'automate de la figure 13, et on a en effet la relation $1 \circ 1 \circ 0 = 0 \circ 3 \circ 3$, puisque l'on a l'égalité

$$\frac{\frac{x}{3} + 1}{3} + 1 = \frac{\frac{x+3}{3} + 3}{3}.$$

Deux mots $u_1 \dots u_n$ et $v_1 \dots v_n$ en les générateurs $\{0, 1, 3\}$ représentent le même élément du semi-groupe si et seulement si le mot $(u_1, v_1) \dots (u_n, v_n)$ est reconnu par l'automate de la figure 13.

L'automate de la figure 12 fournit un moyen de connaître le nombre d'éléments du semi-groupe de longueur n donnée : celui-ci est en effet égal au nombre de chemins de longueur n de l'état initial 0 vers les états finaux 0 et 1. Ceci est donné par la somme des deux premiers coefficients des puissances de la matrice d'adjacence du graphe :

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

dont les valeurs propres sont $\frac{\sqrt{5}+3}{2}$ et $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$. Ainsi, on voit que le nombre d'éléments du semi-groupe de longueur n est exactement f_{2n+2} , où $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est la suite de Fibonacci :

$$\begin{aligned} f_0 &:= 0, \\ f_1 &:= 1, \\ f_{n+2} &:= f_{n+1} + f_n. \end{aligned}$$

En particulier, le nombre d'éléments du semi-groupe de longueur n est asymptotiquement

$$c \left(\frac{\sqrt{5}+3}{2} \right)^n + O \left(\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right)$$

pour une constante $c > 0$. Cela permet d'obtenir que l'exposant critique du semi-groupe vaut

$$\delta_\Gamma := \log_3 \left(\frac{\sqrt{5}+3}{2} \right).$$

Et cet exposant critique est égal à la dimension de Hausdorff de l'ensemble limite (donc aussi de l'ensemble des nombres admettant un développement en base 3 avec chiffres 0, 1 et 3), d'après le résultat nouveau suivant :

Théorème 3.2. — Soit β un nombre de Salem généralisé (voir définition ci-dessous), et soit $A \subset \mathbb{Q}(\beta)$ un ensemble fini de chiffres. Alors le semi-groupe Γ de développement en base β engendré par les applications

$$x \mapsto x/\beta + a, \quad a \in A,$$

vérifie l'égalité

$$\delta_\Gamma = h_\Gamma = \dim_H(\Lambda_\Gamma).$$

Définitions 3.3. — On dit qu'un nombre réel ou complexe β est de Salem s'il est de module strictement supérieur à 1 et que tous ses conjugués (hormis éventuellement son conjugué complexe) sont de modules strictement inférieurs à 1.

On dira que le semi-groupe est **fortement automatique** s'il existe un automate reconnaissant l'ensemble des relations du semi-groupe, comme c'est le cas pour l'exemple ci-dessus avec l'automate de la figure 13.

Nous montrons que la plupart des semi-groupes de développement en base β sont fortement automatiques :

Théorème 3.4. — *Soit un semi-groupe Γ engendré par les transformations :*

$$x \mapsto \beta x + t$$

pour $t \in A \subset \mathbb{C}$, où A est une partie finie de \mathbb{C} , et β est un nombre complexe.

Si le nombre complexe β est transcendant, ou bien algébrique mais sans conjugué de module 1, alors pour toute partie $A \subset \mathbb{C}$ finie, le semi-groupe Γ est fortement automatique.

Réciproquement, si le nombre complexe β est algébrique et a au moins un conjugué de module 1, alors il existe une partie $A \subset \mathbb{C}$ finie telle que le semi-groupe Γ n'est pas fortement automatique.

Et nous donnons aussi un exemple non fortement automatique indépendamment de la partie A :

Proposition 3.5. — *Soit le nombre de Salem $\beta = \frac{1+\sqrt{2}+\sqrt{2\sqrt{2}-1}}{2} \simeq 1.8832035059$ (qui est une racine du polynôme $X^4 - 2X^3 + X^2 - 2X + 1$).*

Alors, pour toute partie $A \subset \mathbb{Q}(\beta)$ de cardinal au moins 2, le monoïde engendré par les applications

$$x \mapsto \beta x + a, \quad a \in A$$

n'est pas fortement automatique.

Idée de preuve du théorème 3.4. — Il existe un moyen simple de construire un automate canonique qui reconnaît les relations d'un monoïde simplifiable. Mais cet automate est a priori infini. On peut identifier les états de cet automate à des éléments de \mathbb{C} , et on se ramène assez facilement à ce que la partie A et les états soient dans $\mathbb{Q}(\beta)$. Pour montrer que l'automate est fini, il suffit dans le cas transcendant de montrer que le degré en β des états qui permettent d'aboutir à l'état final est borné, et que les coefficients du polynôme en β sont aussi bornés. Dans le cas algébrique, on construit un anneau contenant l'ensemble des états de l'automate, et un espace E qui est le produit des complétés du corps $\mathbb{Q}(\beta)$ pour les valeurs absolues v telles que $|\beta|_v \neq 1$, et dans lequel l'anneau se plonge de façon discrète. On montre alors que les états de l'automate sont dans une partie bornée de l'espace E , ce qui prouve alors la finitude du nombre d'états et donc la forte automaticité.

Pour la réciproque, on montre que tous les éléments de l'anneau qui sont dans un domaine infini de l'espace E sont des états de l'automate. On choisit pour cela la partie A assez grosse, pour être capable, partant de n'importe quel point, de trouver une transition de l'automate qui nous rapproche de l'état final 0. Un argument de dualité permet d'avoir aussi un chemin dans l'autre sens dans l'automate. \square

Idée de preuve de la proposition 3.5. — Pour cet exemple explicite, on suit la même stratégie que ci-dessus. Sauf qu'ici on ne peut pas se rapprocher de 0 en une seule transition, mais on est obligé d'en suivre un certain nombre. La preuve consiste alors à découper l'espace en fonction de la valeur absolue v telle que $|\beta|_v > 1$, et en une partie bornée, et à donner une suite de transitions qui nous rapproche de 0 dans chacun des cas. Nous avons trouvé et vérifié tous ces cas par ordinateur. \square

Il existe d'autres notions d'automaticité pour les semi-groupes : les semi-groupes fortement automatiques, et les monoïdes rationnels. Nous relierons notre notion de semi-groupes fortement automatiques à ces deux autres notions :

Proposition 3.6. — *Un monoïde fortement automatique est rationnel. Réciproquement si un monoïde est rationnel et qu'il admet un ensemble de générateurs pour lequel il n'existe pas d'égalité entre des mots de longueurs différentes, alors il est fortement automatique.*

Proposition 3.7. — *Un semi-groupe fortement automatique est automatique.*

Pour un semi-groupe fortement automatique, nous obtenons un algorithme de recherche du mot réduit meilleur que celui existant pour les semi-groupes automatiques, car linéaire au lieu de quadratique :

Proposition 3.8. — *Si un semi-groupe est fortement automatique, alors il existe un algorithme linéaire prenant en entrée un mot et rendant le mot réduit correspondant.*

Étant donné un semi-groupe fortement automatique, la question se pose de savoir s'il est nécessairement de présentation finie. Nous montrons, que la réponse est négative :

Proposition 3.9. — *Soit $\beta \simeq 1.7924023578$ la racine réelle du polynôme $X^5 - X^4 - X^3 - X^2 + X - 1$. Alors le monoïde engendré par les deux applications*

$$\begin{cases} 0 : x \mapsto \beta x \\ 1 : x \mapsto \beta x + 1 \end{cases}$$

n'est pas de présentation finie.

Nous étudions aussi divers exemples et donnons à chaque fois des exemples d'automates et les valeurs des exposants critiques.

4. Construction de fractions continues périodiques uniformément bornées

Il est connu depuis Wilson que tout corps quadratique réel $\mathbb{Q}[\sqrt{\delta}]$ contient une infinité de fractions continues périodiques bornées par une constante M_δ , qui dépend du corps quadratique. La conjecture de McMullen affirme que l'on peut choisir une borne indépendante de M :

Conjecture 4.1 (McMullen(M)). — *Dans tout corps quadratique réel $\mathbb{Q}[\sqrt{\delta}]$, il existe une infinité de fractions continues périodiques uniformément bornées par M .*

La conjecture est sans doute vraie pour $M = 2$, c'est-à-dire avec des fractions continues ne comportant que les nombres 1 et 2.

Voici une conjecture semblable, pour les fractions continues finies :

Conjecture 4.2 (Zaremba(M)). — *Pour tout dénominateur $q \geq 1$, il existe un numérateur p tel que le développement en fraction continue du rationnel $\frac{p}{q}$ est borné par M .*

À nouveau, on pense que la conjecture est vraie pour $M = 2$, sauf pour un nombre fini de dénominateurs q . Bourgain et Kontorovich sont parvenus à montrer que la conjecture était vraie pour presque tout dénominateur q , avec la borne $M = 50$ (voir [4]). Je démontre le lien suivant entre ces deux conjectures :

Théorème 4.3. — *La conjecture Zaremba(M) implique la conjecture McMullen($M+1$).*

Je démontre aussi que la conjecture de McMullen est vérifiée pour une infinité de corps quadratiques :

Théorème 4.4. — *Il existe une infinité de corps quadratiques réels dans lesquels il existe une infinité de fraction continues périodiques bornées par 2.*

Et j'ai amélioré la borne de Wilson sur les suites de fractions continues périodiques qui restent dans un corps quadratique donné :

Théorème 4.5. — *Dans tout corps quadratique réel $\mathbb{Q}[\sqrt{\delta}]$, il existe une infinité de fractions continues périodiques bornées par $4 \lfloor \sqrt{\delta} \rfloor + 1$.*

Le théorème de Wilson donne des suites de fractions continues périodiques bornées par $O(\delta)$ dans $\mathbb{Q}[\sqrt{\delta}]$.

Ces résultats que nous avons obtenus, découlent de deux moyens que nous avons découverts, de construire des fractions continues périodiques bornées dans les corps quadratiques. Le premier permet d'obtenir des suites de fractions continues périodiques uniformément bornées dans un corps quadratique réel donné, à partir d'une fraction continue périodique particulière. Plus précisément, on a le résultat suivant.

Théorème 4.6. — *Si la fraction continue périodique quasi-palindromique*

$$[\overline{a_0, a_1, a_2, \dots, a_2, a_1}]$$

est dans $\mathbb{Q}[\sqrt{\delta}]$, alors il existe deux uplets d'entiers strictement positifs (b_1, b_2, \dots, b_k) et (c_1, c_2, \dots, c_l) tels que $\mathbb{Q}[\sqrt{\delta}]$ contienne la suite non constante de fractions continues périodiques

$$[\overline{b_1, b_2, \dots, b_k, (a_0, a_1, a_2, \dots, a_2, a_1)^n, c_1, c_2, \dots, c_l, (a_1, a_2, \dots, a_2, a_1, a_0)^n}]$$

En outre, si m est un majorant des entiers a_i , alors on peut demander à ce que $2m+1$ soit un majorant des entiers b_i et c_i .

Références

- [1] Y. Benoist. Réseaux des groupes de Lie. cours de M2 à Paris 6, 2007-2008.
- [2] J. Berstel. *Transductions and Context-Free Languages*. Teubner Verlag, 1979.
- [3] P. Bougerol and J. Lacroix. *Products of Random Matrices with Applications to Schrödinger Operators*. Birkhäuser, 1985.
- [4] J. Bourgain and A. Kontorovich. On Zaremba’s conjecture. *arXiv*, 2011.
- [5] L. Bowen. Free groups in lattices. *arXiv*, 2008.
- [6] A. Cain. *Presentations for subsemigroups of groups*. PhD thesis, University of St Andrews, 2005.
- [7] O. Carton. *Langages formels, calculabilité et complexité*. Vuibert, 2008.
- [8] J. Cassaigne and F. Nicolas. On the decidability of semigroup freeness, 2008.
- [9] J.-M. Champarnaud, A. Khorsi, and T. Paranthoën. Split and join for minimizing : Brzozowski’s algorithm, 2005.
- [10] M. Coornaert. Mesures de Patterson-Sullivan sur le bord d’un espace hyperbolique au sens de Gromov. *Pacific J. Math.*, 159(2) :241–270, 1993.
- [11] K. Corlette and A. Iozzi. Limit sets of discrete groups of isometries of exotic hyperbolic spaces. *Amer. Math. Soc.*, 351(4) :1507–1530, 1999.
- [12] P. Doyle. On the bass note of a Schottky group. *Acta Math.*, 160 :249–284, 1988.
- [13] D. Epstein, J. Cannon, et al. *Word processing in groups*. Jones and Barlett, 1992.
- [14] K. Falconer. *Dimensions and Measures of Quasi Self-Similar Sets*, volume 106. Proc. Amer. Math. Soc., 1989.
- [15] H. Federer. *Geometric Measure Theory*. Springer, 1969.
- [16] É. Ghys. Poincaré et son disque. In *L’héritage scientifique de Henri Poincaré*. Belin, 2006.
- [17] E. Ghys, P. de la Harpe, et al. *Sur les groupes hyperboliques d’après Mikhael Gromov*, volume 83. Birkhäuser, Progr. Math. edition, 1990.
- [18] T. Haettel. Compactification de chabauty de l’espace des sous-groupes de cartan de $SL_n(\mathbb{R})$. *Mathematische Zeitschrift*, 2012.
- [19] D. Hensley. A polynomial time algorithm for the Hausdorff dimension of continued fraction Cantor sets. *journal of number theory*, 58(58) :9–45, 1996.
- [20] I. Holopainen, U. Lang, and A. Vähäkangas. Dirichlet problem at infinity on Gromov hyperbolic metric measure spaces. *Math. Ann.*, 339 :101–134, 2007.
- [21] C. Houdayer and O. Jaudent. Groupes fuchsien. exposé proposé par F. Paulin, juin 2002.
- [22] O. Jenkinson and M. Pollicott. Computing the dimension of dynamically defined sets I : E_2 and bounded continued fractions. *Erg. Theo. Dyn. Syst.*, 21 :1429–1445, 2001.
- [23] M. Kapovich. Kleinian groups in higher dimensions. *Prog. Math.*, 265 :485–562, 2007.
- [24] R. Kenyon. Projecting the one-dimensional Sierpinski gasket. *Israel J. Math.*, pages 221–238, 1997.
- [25] S. Lalley. β -expansions with deleted digits for Pisot numbers β . *Trans. Amer. Math. Soc.*, 349 :4355–4365, November 1997.
- [26] S. Lang. *Algebraic Number Theory*, volume 110. Springer, 1970.

- [27] A. Marden. On finitely generated Fuchsian groups. *Commentarii Mathematici Helvetici*, 42 :81–85, 1967.
- [28] Curtis T. McMullen. Uniformly Diophantine numbers in a fixed real quadratic field. *Compositio Math.*, 145 :827–844, 2009.
- [29] P. Mercat. Un théorème de Patterson et Sullivan. Master’s thesis, É.N.S., 2009.
- [30] P. Mercat. Semi-groupes fortement automatiques, 2011. À paraître dans les bulletins de la S.M.F.
- [31] S. J. Patterson. The limit set of a Fuchsian group. *Acta Math.*, 136 :241–273, 1976.
- [32] F. Paulin. On the critical exponent of a discrete group of hyperbolic isometries. In *Diff. Geom. and its Appl.*, volume 7, pages 231–236. Elsevier, 1997.
- [33] O. Perron. *Die Lehre von den Kettenbrüchen*. B.G. Teubner, 1913.
- [34] J.-F. Quint. An overview of Patterson-Sullivan theory. cours Zurich, 2006.
- [35] T. Roblin. *Ergodicité et équidistribution en courbure négative*, volume 95. Mémoires Soc. Math. France, 2003.
- [36] W. Rudin. *Functional analysis*. McGraw Hill, 1921.
- [37] J. Sakarovitch. Easy multiplications I. the realm of Kleene’s theorem. *Information and Computation*, 74 :173–197, 1987.
- [38] B. Schapira. Lemme de l’ombre et non divergence des horosphères d’une variété géométriquement finie. *Ann. Inst. Fourier*, 54(4) :939–989, 2004.
- [39] D. Sullivan. The density at infinity of a discrete group of hyperbolic motions. *Pub. Math. I.H.E.S.*, 50 :171–202, 1979.
- [40] S.M.J. Wilson. Limit points in the Lagrange spectrum of a quadratic field. *Bull. S.M.F.*, 108 :137–141, 1980.

6 mai 2013

PAUL MERCAT