RÉSUMÉ DE MA THÈSE INTITULÉE "SEMI-GROUPES DE MATRICES ET APPLICATIONS"

par

Paul MERCAT

Cette thèse s'intéresse aux semi-groupes de matrices avec trois points de vue principaux :

1. Un point de vue géométrique et dynamique. Nous étudions les vitesses de croissances et ensembles limites de semi-groupes agissant sur un espace hyperbolique.
2. Un point de vue informatique. Nous étudions les semi-groupes dont l'ensemble des relations est un langage rationnel. Nous appliquons cela aux semi-groupes de développement en base β, et en déduisons des informations combinatoires.
3. Un point de vue arithmétique. Nous nous intéressons à des semi-groupes particuliers qui correspondent à des développements en fractions continues périodiques ou finis, afin d'aborder des questions sur les fractions continues bornées.

Ces divers points de vue sont reliés. Par exemple, la dimension de Hausdorff des ensembles limites des semi-groupes étudiés dans le troisième point s'avèrent donner des informations sur des questions sur les fractions continues. Le point de vue informatique s'avère également utile pour calculer les valeurs exactes de dimensions de Hausdorff d'ensembles limites de semi-groupes de développement en base β.

Détaillons ces trois principaux axes de nos travaux.

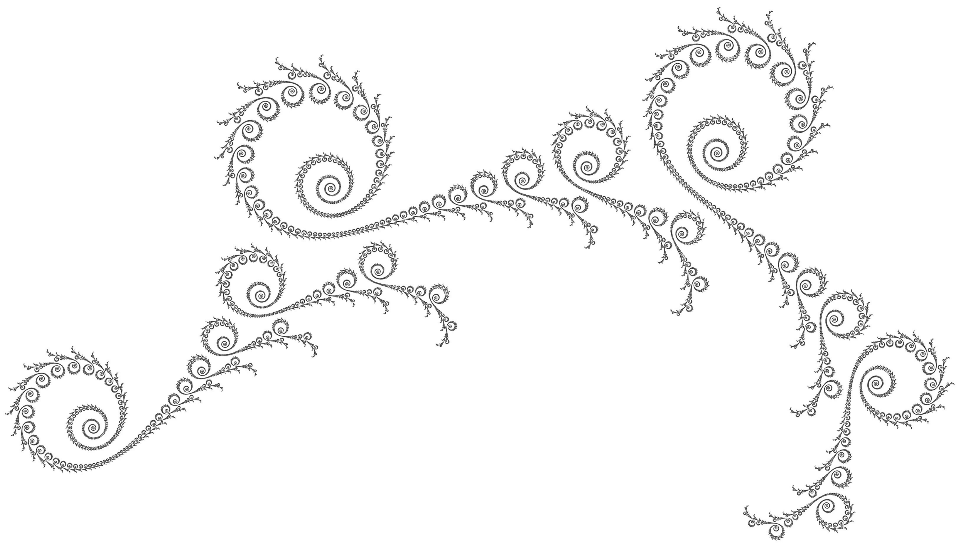
1. Géométrie et dynamique

Nous avons tâché de généraliser aux semi-groupes la théorie de Patterson-Sullivan sur les groupes discrets. Il s'agit d'une très belle théorie qui s'intéresse à la vitesse de croissance des groupes discrets (c'est-à-dire l'exposant exponentiel quand n croît,

Mots clefs. — Semi-groupe, espace hyperbolique, isométrie, exposant critique, dimension de Hausdorff, ensemble limite, fractale, développement β-adique, automate, langage rationnel, fraction continue, équation de Pell-Fermat, nombre de Pisot, nombre de Salem.

du nombre d'éléments de norme bornée par n), et à leur ensemble limite (c'est-à-dire le plus petit fermé invariant non vide pour l'action du groupe sur le bord de l'espace). Le premier exemple auquel s'applique cette théorie est le groupe $SL_2(\mathbb{R})$ agissant par homographie sur le demi-plan de Poincaré, dont le bord est l'ensemble $\mathbb{R}$ des réels. Les ensembles limites des sous-groupes discrets de $SL_2(\mathbb{R})$ ressemblent à des ensembles de Cantor, et la figure 1 montre un exemple d'ensemble limite de semi-groupe d'isométries de $\mathbb{H}^3_{\mathbb{R}}$, l'espace hyperbolique de dimension 3.

FIGURE 1. Ensemble limite d'un sous-semi-groupe de $SL_2(\mathbb{C})$ agissant par homographie sur le plan complexe



Les travaux que nous avons réalisé pour généraliser cette théorie, s'inscrive naturellement dans le cadre général des semi-groupes d'isométries d'un espace Gromov-hyperbolique. Nous définissons l'**entropie** d'un semi-groupe d'isométrie d'un espace Gromov-hyperbolique comme la borne supérieure des exposants critiques des parties métriquement séparées. Ceci fournit une généralisation de l'exposant critique qui permet de considérer des semi-groupes non nécessairement métriquement séparés. Nous démontrons que l'entropie d'un semi-groupe non élémentaire (c'est-à-dire ayant un ensemble limite de cardinal au moins deux) est égale à la borne supérieure des exposants critiques des sous-semi-groupes de Schottky, sous l'hypothèse que l'espace est propre et à bord compact. Et ce résultat permet d'obtenir des corollaires intéressants : Nous montrons, toujours dans le même cadre, l'égalité entre entropie et dimension de Hausdorff de l'ensemble limite radial, ce qui généralise un résultat que F. Paulin avait démontré pour les groupes. Il reste à déterminer s'il y a bien égalité entre dimension de l'ensemble limite radial (qui est une partie de l'ensemble limite) et dimension de l'ensemble limite. Nous obtenons aussi la semi-continuité inférieure de l'entropie, ainsi qu'une caractérisation de cette dernière. Et en reconstruisant des groupes à partir de semi-groupes, nous montrons aussi l'existence de "gros" sous-groupes de Schottky dans les groupes discrets.

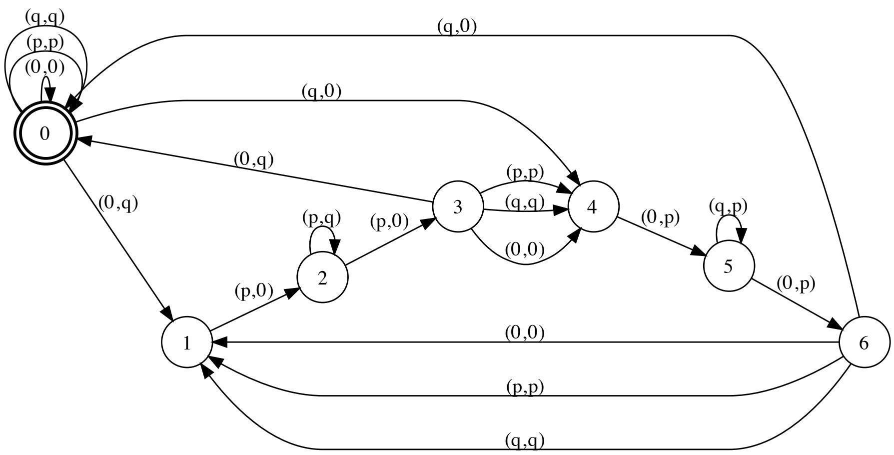
2. Informatique

Nous appelons **fortement automatiques** les semi-groupes ayant un ensemble de relations reconnaissable par un automate fini. C'est-à-dire que pour un semi-groupe engendré par un partie Σ, il existe une machine qui lit un mot sur l'alphabet $\Sigma \times \Sigma$, et qui décide en temps linéaire et avec une mémoire finie si les mots de part et d'autre représentent le même élément du semi-groupe.

Figure 2. Automate des relations du monoïde engendré par les trois applications

$$\begin{cases} 0: & x & \mapsto & \beta x, \\ \mathrm{q}: & x & \mapsto & \beta x & + & \beta, \\ \mathrm{p}: & x & \mapsto & \beta x & + & \beta^2-\beta+1, \end{cases}$$

où β est un nombre transcendant.



Cette notion est assez rigide en comparaison avec d'autres notions d'automaticité existentes, puisque les groupes infinis ne sont par exemple pas fortement automatiques. Néanmoins, la plupart des semi-groupes de développement en base β sont fortement automatiques. Si l'on considère le semi-groupe Γ engendré par les applications $x \mapsto \beta x + t$ pour t dans une partie finie A, nous montrons que Γ est fortement automatique dès que β est transcendant, ou bien algébrique mais sans conjugué de module 1. Réciproquement, nous montrons que si β est un nombre algébrique ayant un conjugué de module 1, alors il existe une partie finie A pour laquelle le semi-groupe Γ n'est pas fortement automatique. Et nous donnons un exemple explicite de nombre β pour lequel le semi-groupe n'est automatique pour aucune partie finie A de cardinal au moins deux. La forte automaticité donne des informations combinatoires telles que le comptage du nombre de mots en les générateurs de longueur bornée, et permet par exemple de résoudre le problème des mots en temps linéaire. Pour les semi-groupes de développement en base β, le fait d'être fortement automatique permet de calculer la valeur exacte de l'exposant critique. Nous avons d'ailleurs implémenté l'algorithme que donne notre preuve constructive, ce qui nous a permis de calculer explicitement les exposants critiques exacts pour de nombreux exemples.

3. Fractions continues

Nous nous intéressons à des questions de McMullen et de Zaremba sur les fractions continues bornées, c'est-à-dire les fractions continues de la forme

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{\ddots}}}}$$

avec pour tout i, l'encadrement $1 \leq a_i \leq m$ de l'entier a_i pour une borne m. Cela se ramène facilement à l'étude du semi-groupe engendré par les matrices $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & i \end{pmatrix}$ pour $1 \leq i \leq m$. McMullen se demande si tous les corps quadratiques $\mathbb{Q}[\sqrt{\delta}]$ contiennent une infinité de fractions continues périodiques bornées, avec une borne uniforme, par exemple 2. Tandis que Zaremba demande s'il existe une borne m telle que pour tout dénominateur q (sauf éventuellement un nombre fini), il existe un numérateur p tel que la fraction p/q soit irréductible et ait un développement en fraction continue borné par m. Nous démontrons que la conjecture de Zaremba avec un borne m implique la conjecture de McMullen avec une borne $m + 1$. Nous faisons cela en construisant des fractions continues périodiques à partir de fractions continues bornées, et dans un corps quadratique qui ne dépend que du dénominateur du rationnel (il suffit que ce dénominateur fasse partie d'une solution d'une équation de Pell-Fermat).

Nous démontrons aussi qu'il existe une infinité de corps quadratiques dans lesquels il existe une infinité de fractions continues périodiques ne comportant que les entiers 1 et 2. Et dans tous les corps quadratiques réels, nous obtenons des fractions continues périodiques bornées avec une borne meilleur que celle connue jusqu'ici depuis Wilson.

Paul MERCAT, Université Paris-Sud 11, 91405 Orsay • *E-mail :* paul.mercat@math.u-psud.fr
Url : http://www.math.u-psud.fr/~mercat