Planche 4: Actions des Groupes

Rappels de cours : Une action de G sur l'ensemble non–vide X est donné par un homomorphisme $\varphi : G \to Sym(X)$, où $Sym(X)$ est le groupe des auto-applications bijectives de X. On obtient l'action associée par $G \times X \to X, (g, x) \to g \cdot x := \varphi(g)(x)$, donc $e \cdot x = x$ et $(gh) \cdot x = g \cdot (h \cdot x)$ pour tout $x \in X$, pour tout $g, h \in G$.
Notations: $O_x = \{g \cdot x \mid g \in G\}$ orbite de x, $X^g = Fix(g) = \{x \mid g \cdot x = x\}$, $G_x = Stab(x) = \{g \mid g \cdot x = x\}$ le stabilisateur de x: c'est un sous–groupe de G. L'action est transitive si $X = O_x$, et simplement transitive si transitive et $G_x = \{e\}$ (pour un, donc tous, $x \in X$). On voit que "être dans la même orbite" est une relation d'équivalence.

Exercice 1)
a) Montrer que $y \in O_x \implies G_y$ est un sous-groupe conjugué à G_x.
b) Montrer que l'action induit une action de G sur $\mathcal{P}(X) = 2^X$.
c) (i) Montrer que $G \times G \to G, (g, h) \to gh$ définie une action (translation à gauche). Décrire $O_h, G^g = Fix(g), G_h = Stab(h)$.
(ii)+(iii) Même chose pour $G \times G \to G, (g, h) \to hg^{-1}$ (translation à droite) et pour $G \times G, (\gamma, g) \to \gamma g \gamma^{-1}$ definie une action (conjugasion). Pour chaque action, écrire O_h, G^g, G_h.
(iv) Pour l'action de conjugaison d'un groupe fini G, montrer que $|O_x| = |G|/|G_x|$. Comme $G = \cup_{y \in G} O_y$, déduire que $|G| = |Z(G)| + \sum_{i=1}^{n} |G|/|G_{x_i}|$ où n est le nombre d'orbites d'au moins 2 éléments, et $\{x_i\}$ est une collection contenant un et un seul représentant pour chacune de ces orbites.
(v) Soit G un groupe fini agissant sur un ensemble fini X. Compter les elements de l'ensemble $\{(g, x) \in G \times X \mid g \cdot x = x\}$ de deux façons différentes. Montrer que $n = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |X^g|$, où n est le nombre d'orbites de l'action : la formule de Burnside.

Exercice 2)
a)Montrer que pour $m \geq 3$, un groupe simple d'ordre $\geq m!$ ne peut avoir de sous-groupe d'indice m.
b) Soit G un groupe fini agissant sur un ensemble fini X.
(i) On suppose que toute orbite contient au moins deux éléments, que $|G| = 15$ et que $\mathrm{Card}(X) = 17$. Déterminer le nombre d'orbites et le cardinal de chacune. (ii) On suppose que $|G| = 33$ et $\mathrm{Card}(X) = 19$. Montrer qu'il existe au moins une orbite réduite à un élément.
c) Décrire le groupe D_n des isométries du plan affine euclidien qui laissent invariant un polygone régulier à n côtés. Montrer que D_n est engendré par deux éléments σ et τ qui vérifient les relations : $\sigma^n = id, \tau^2 = id$ et $\tau\sigma\tau^{-1} = \sigma^{-1}$. Quel est l'ordre de D_n ? Déterminer le centre de D_n. Montrer que $D_3 \cong S_3$.

Exercice 3) Les symétries du dodécaèdre
Ici on va étudier le groupe $Sym(D)$ des symétries d'un dodécaèdre D.
1) Construire un dodécaèdre avec le modèle papier donné.
2) Combien d'élements y a–t–il correspondant aux rotations autour des axes passant par deux sommets opposés? Quel est leur ordre? Combien de éléments de cet ordre y a–t–il?
3) Combien d'élements y a–t–il correspondant aux rotations autour des axes passant par deux centres de faces opposés? Quel est leur ordre? Combien d'éléments de cet ordre y a–t–il?
4) Combien d'élements y a–t–il correspondant aux rotations autour des axes passant par deux mi–points des arêtes opposés? Quel est leur ordre? Combien de éléments de cet ordre y a–t–il?
5) Quel est l'ordre du groupe $Sym(Dodeca)$?
6) Vérifier que les arêtes de couleurs forment un ensemble 5 cubes inscrits.
7) Vérifier que le groupe de symétries du dodécaèdre agit sur ces de cubes de façon transitive et fidèle.
8) Déduire que le groupe de symétries est isomorphe à un sous-groupe de S_5, et identifier ce sous-groupe.

Exercice 4: Les sous–groupes finis de $SO_3(\mathbb{R})$
Soit G un sous–groupe fini avec $|G| > 1$ de $SO_3(\mathbb{R}) = \{M \in GL_3(\mathbb{R}) \mid M^T M = M M^T = I, \det(M) = 1\}$. Soit $X \subset S^2$ l'ensemble $\{x \in S^2 \mid \exists\, g \in G - \{id\}, g \cdot x = x\}$.
a) Montrer que G agit sur X et déterminer $|X^g|$ pour chaque $g \neq id$ (noter que toute matrice $M \in SO_3(\mathbb{R})$ possède une valeur propre réelle, donc un vecteur propre — elle correspond alors à une rotation).
b) Soit N le nombre d'orbites, $x_1, \ldots x_N$ un point dans chaque orbite. Comme avec Burnside, compter les elements de l'ensemble $\{(g, x) \in \big(G - \{id\}\big) \times X \mid g \cdot x = x\}$ de deux façons différentes pour montrer que

$$2(1 - \frac{1}{|G|}) = \sum_{i=1}^{N} (1 - \frac{1}{|G_{x_i}|}) \ .$$

c) En déduire que N ne peut prendre que les valeurs 2 ou 3 (le coté gauche est au plus 2, le coté droite au moins $N/2$ ...).
d) Décrire G quand $N = 2$.
e) Lorsque $N = 3$ il y a quatre cas:
- 2 orbites où les éléments ont stabilisateur d'ordre 2, une d'ordre n, et $|G| = 2n$
- une orbite où les éléments ont stabilisateur d'ordre 2, deux d'ordre 3, et $|G| = 12$
- une orbite où les éléments ont stabilisateur d'ordre 2, une de 3 et une de 4, et $|G| = 24$
- une orbite où les éléments ont stabilisateur d'ordre 2, une de 3 et une de 5, et $|G| = 60$.

Décrire les configurations des points de X et les actions des groupes G.