COURS DE LICENCE 3. ANNÉE 2016/2017
STRUCTURES ALGÉBRIQUES UE: ENSMI6UX

TD1. Définition de groupe, sous–groupe etc.

Exercice 1 (Sudoku d'un groupe)**.** Soit $G = \{a, b, c, x, y, z\}$ un ensemble à 6 éléments avec une loi de composition interne $\circ : G \times G \to G$. Remplir la table de multiplication ci-dessous en supposant que $(G, \circ)$ est un groupe.

∘	a	b	c	x	y	z
a					c	b
b		x	z			
c		y				
x				x		
y						
z		a			x	

Exercice 2 (Loi de composition interne et groupes)**.** On sait que $(\mathbb{C}, +)$, $(\mathbb{R}, +)$, $(\mathbb{Q}, +)$, $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{C}^*, *)$, $(\mathbb{R}^*, *)$, $(\mathbb{Q}^*, *)$ sont des groupes commutatifs (où $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} - \{0\}$, et l'opération $*$ est la multiplication usuelle).

Est-ce que les exemples suivants des ensembles et opérations sont des groupes? Si la reponse est “oui”, dire si ce groupe est commutatif. Si la reponse est “non”, dire lequel (ou lesquels) des axiomes n'est pas satisfait(s).

(1) $\mathbb{Z}$ avec l'opération de multiplication.
(2) $3\mathbb{Z} = \{3n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ avec l'opération d'addition.
(3) $\mathbb{C}$ avec l'opération $a * b = |ab|$.
(4) $\mathbb{R}^+$ avec l'opération $a * b = \sqrt{ab}$.
(5) $\{e^{i\theta} \mid \theta \in [0, 2\pi[\} \subset \mathbb{C}$ avec l'opération de multiplication complexe usuelle.
(6) $\{e^{i\theta} \mid \theta \in [0, 2\pi[\cap\mathbb{Q}\} \subset \mathbb{C}$ avec l'opération de multiplication complexe usuelle.
(7) $\{e^{i\theta} \mid \theta \in [0, 2\pi[\cap(\mathbb{R} - \mathbb{Q})\} \subset \mathbb{C}$ avec l'opération de multiplication complexe usuelle.
(8) $\{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ avec multiplication usuelle dans $\mathbb{R}$.
(9) $\mathbb{R} - \{-1\}$ avec l'opération $a * b = a + b + ab$.

Exercice 3 (Groupes de matrices)**.** Rappellons qu'une matrice est diagonale (resp. triangulaire sup érieure) si tous les entrées hors diagonal (resp. au-dessous du diagonal) sont 0. On utilise la notation $M_2(k) = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ avec } a, b, c, d \in k\right\}$ avec $k = \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}$ etc.

Lesquels des sous–ensembles de matrices avec les opérations données sont–ils des groupes?

(1) Les matrices diagonales dans $M_2(\mathbb{R})$ avec addition.
(2) Les matrices diagonales dans $M_2(\mathbb{R})$ avec multiplication.
(3) Les matrices diagonales dans $M_2(\mathbb{R})$ sans zéro sur le diagonal, avec multiplication.
(4) Les matrices diagonales dans $M_2(\mathbb{Z})$ de déterminant 1, avec multiplication.
(5) Les matrices triangulaires supérieures dans $M_2(\mathbb{C})$ avec addition.
(6) Les matrices triangulaires supérieures dans $M_2(\mathbb{C})$ avec multplication.
(7) Les matrices triangulaires supérieures dans $M_2(\mathbb{C})$ sans 0 sur le diagonal avec multplication.
(8) Les matrices triangulaires supérieures dans $M_2(\mathbb{C})$ de déterminant ± 1 avec multplication.

Exercice 4 (Un groupe fini d'ordre 4)**.**

Soient les quatre applications de $\mathbb{C}^*$ dans $\mathbb{C}^*$:

$$f_1(z) = z\ ,\ f_2(z) = \frac{1}{z}\ ,\ f_3(z) = -z\ ,\ f_4(z) = -\frac{1}{z}$$

Montrer que $G = \{f_1, f_2, f_3, f_4\}$ est un groupe pour la loi $\circ$. Est–il cyclique?

Exercice 5 (Tous les éléments sont réguliers)**.**

Soit E un ensemble fini muni d'une loi de composition interne $\star$ associative. Supposer que tous les éléments de E sont réguliers ($\forall x, y, z \in E, x * y = x * z \implies y = z$ et $x * z = y * z \implies x = y$) et fixer $a \in E$.

(1) Démontrer qu'il existe $e \in E$ tel que $a \star e = a$. Cet élément e est–il unique?

Date: January 19, 2018.

(2) Démontrer que, pour tout $x \in E$, on a $e \star x = x$.
(3) Démontrer que, pour tout $x \in E$, on a $x \star e = x$.
(4) Démontrer que $(E, \star)$ est un groupe.
(5) Le résultat subsiste-t-il si E n'est pas fini ?

Exercice 6 (Rappels:Groupes Cycliques)**.** Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $\sim_n$ la relation sur $\mathbb{Z}$: $\forall x, y \in \mathbb{Z}$, $x \sim_n y \iff n$ divise $|x - y|$. Soit $\mathbb{Z}_n = \{\bar{0}, \bar{1}, \ldots, \overline{n-1}\}$ le quotient $\mathbb{Z}/\sim_n$ de $\mathbb{Z}$ par cette relation, c'est à dire l'ensemble des classes d'équivalence.

(1) Vérifier que l'opération $\bar{x} + \bar{y} = \overline{(x+y)}$ donne un structure de groupe à Z_n.
(2) Quels sont les sousgroupes de $\mathbb{Z}_4, \mathbb{Z}_5, \mathbb{Z}_6, \mathbb{Z}_{12}$?
(3) Combien de homomorphismes y a–t–il $\mathbb{Z}_3 \to \mathbb{Z}_{12}$? De $\mathbb{Z}_5 \to \mathbb{Z}_{12}$? De $\mathbb{Z}_5 \to \mathbb{Z}_{15}$?
(4) Pour n fixé, quels sont les m tels qu'il existe un homomorphisme injectif $\mathbb{Z}_m \to \mathbb{Z}_n$?

Exercice 7 (Exemples de sous-groupes)**.**

i) Entre les exemples des deux premiers exercices qui son en effet des groupes, lesquels sont des sousgroupes des autres (ou des groupes bien connus $\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}$ etc.)?

ii) Soit $(G, \cdot)$ un groupe. Montrer que les ensembles suivants sont des sous-groupes de G.

(1) $Z(G) = \{x \in G | \forall y \in G, x \cdot y = y \cdot x\}$. ($Z(G)$ est le *centre* de G.)
(2) Soit $a \in G$ et $C_G(a) = \{x \in G | x \cdot a = a \cdot x\}$. ($C_G(a)$ est le *centralizateur* de a dans G.)
(3) $aHa^{-1} = \{x \in G | \exists h \in H, x = a \cdot h \cdot a^{-1}\}$ avec H un sous-groupe de G.

Exercice 8 (Groupe produit)**.**

Soit $(G, \star)$ et $(H, \Box)$ deux groupes. On définit sur $G \times H$ la loi $\circ$ définie par :

$$(x, y) \circ (x', y') = (x \star x', y \Box y')$$

(1) Montrer que $(G \times H, \circ)$ est un groupe.
(2) Si G est d'ordre 2, dresser la table de $G \times G$.

Exercice 9 (Groupes de rotations du plan)**.**

(1) Soit ABC un triangle équilatéral du plan. Déterminer l'ensemble des rotations laissant invariant $\{A, B, C\}$. Montrer que c'est un groupe pour la loi $\circ$.
(2) Faire de même pour un carré $ABCD$.

Exercice 10 (Produit de deux sous-groupes)**.**

Soit $(G, \cdot)$ un groupe et A, B deux sous-groupes. On note $A \cdot B = \{a \cdot b | a \in A, b \in B\}$.

(1) Montrer que $A \cdot B$ est un sous-groupe de G si et seulement si $A \cdot B = B \cdot A$.
(2) On suppose que A et B sont finis et que $A \cap B = \{e\}$. Montrer que $A \cdot B$ est fini et que $|A \cdot B| = |A| \times |B|$.

Exercice 11 (Image réciproque, image directe de sous-groupe)**.**

Soient $(G, \cdot)$ et $(G', \cdot)$ des groupes et $f \in \mathrm{Hom}(G, G')$.

(1) Montrer : H' est un sous-groupe de $G' \implies f^{-1}\{H'\}$ est un sous-groupe de G.
(2) Montrer : H est un sous-groupe de $G \implies f(H)$ est un sous-groupe de G'.
(3) Retrouver que $\mathrm{Ker} f$ et $\mathrm{Im} f$ sont des sous-groupes de G et G'.

Exercice 12 (Loi Δ)**.**

Soit E un ensemble et $G = \mathcal{P}(E) = \{A \subset E\}$ l'ensemble des parties de E. On rappelle que si $A, B \in G$, la différence symétrique est $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

(1) Montrer que (G, Δ) est un groupe commutatif.
(2) Pour $a \in E$ on définit $\phi_a : G \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ par $\phi_a(X) = \begin{cases} 0 \text{ si } a \notin X \\ 1 \text{ si } a \in X \end{cases}$.
Montrer que ϕ_a est un morphisme de groupes de (G, Δ) vers $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.
(3) On prends $E = \{1, \ldots, n\}$ et on note

$$\begin{aligned} \Phi : G &\longrightarrow (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n \\ X &\longmapsto (\phi_1(X), \ldots, \phi_n(X)). \end{aligned}$$

Montrer que ϕ est un Isomorphisme de groupes

Exercice 13 (Endomorphismes d'ensembles de nombres)**.**

(1) Trouver tous les endomorphismes et les automorphismes du groupe $(\mathbb{Z}, +)$.
(2) Trouver tous les endomorphismes du groupe $(\mathbb{Q}, +)$.
(3) Trouver tous les endomorphismes continus du groupe $(\mathbb{R}, +)$.

Exercice 14 (Vrai ou Faux)**.**

(1) Les sous-groupes additifs de $\mathbb{Z}$ sont infinis.
(2) Soit l'application

$$\begin{aligned} f : G &\to G \\ x &\mapsto x^{-1} \end{aligned}$$

  (a) f est un morphisme de groupe.
  (b) f est bijective.
  (c) $\{f^n | n \in \mathbb{Z}\}$ est un groupe fini.

(3) La réunion de deux sous-groupes n'est jamais un sous-groupe
(4) L'application

$$\begin{aligned} (\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), +) &\longrightarrow (\mathbb{R}, +) \\ f &\longmapsto f(0) \end{aligned}$$

est un morphisme de groupe ? l'application est-elle injective ?

Exercice 15 (Petit théorème de Lagrange)**.**
Soit $(G, \cdot)$ un groupe commutatif fini et $g \in G$. Montrer que l'ordre de g divise le cardinal de G. On pourra considérer $\prod_{h\in G}(gh)$.

Exercice 16 (Ordre d'un élément)**.**

(1) Soient G, H deux groupes et $f \in \mathrm{Hom}(G, H)$. Soit $x \in G$. Comparer l'ordre de x et de $f(x)$.
(2) Soient $x, g \in G$. Comparer l'ordre de x et de gxg^{-1}.
(3) Soient $a, b \in G$. Comparer l'ordre de ab et de ba.

Exercice 17 (Ordre de ab)**.**
Soit $x, y \in G$ tels que x est d'ordre a et y est d'ordre b avec $a \wedge b = 1$. De plus $xy = yx$.

Déterminer l'ordre de ab.

Exercice 18 (Pas de sous-groupe)**.**
Soit G un groupe n'ayant pas de sous-groupe non-trivial.

(1) Montrer que G est monogène (cyclique).
(2) Montrer que G est fini.
(3) Montrer que —G— est un nombre premier.

Exercice 19. Soit G un groupe vérifiant $\forall g \in G, \quad g^2 = e$. Montrer que G est commutatif. Déduire que si G est fini, alors l'ordre de G est une puissance de 2.

Exercice 20. Soit G un groupe d'ordre impair. Montrer que l'application f de G sur lui-même donnée par $f(x) = x^2$ est une bijection. En déduire que l'équation $x^2 = e$ a une unique solution, à savoir $x = e$.

Exercice 21. Soient G un groupe fini et m un entier premier à l'ordre de G. Montrer que pour tout $a \in G$ l'équation $x^m = a$ admet une unique solution.