

COURS DE LICENCE 3IÈME ANNÉE 2017–18
STRUCTURES ALGÈBRIQUES UE: ENSMI6UX

TD2. Sous-groupes distingués, groupe quotient

Exercice 1. Montrer que l'image réciproque d'un sous-groupe distingué par un homomorphisme est un sous-groupe distingué. Que dire de l'image directe d'un sous-groupe distingué ?

Exercice 2. Il y a 6 symétries d'un triangle dans le plan: 3 réflexions et les rotations de $2\pi/3$, $4\pi/3$ et 2π (qui est l'identité).

- a) Vérifier que ce groupe G est isomorphe à S_3 .
- b) Trouver tous les sous-groupes. Observer qu'il n'y a qu'un d'ordre 3 — appelons-le H .
- c) Montrer que les sous-groupes distingués sont les deux triviaux et H .
- d) Peut-on dire que si un groupe possède un unique sous-groupe L d'ordre k alors L est distingué?
- e) Donner les éléments des trois quotients de G par ces sous-groupes distingués. Pour chaque quotient donner la table de multiplication correspondante.
- f) Il y a 8 symétries d'un carré dans le plan, 4 réflexions, et les rotations de $\pi/2$, π , $3\pi/2$ et 2π (qui est l'identité). Même questions.

Exercice 3. Soit $G = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix} \mid a_{11}a_{22} \neq 0, a_{ij} \in \mathbb{R} \right\}$, avec l'opération de multiplication.

- a) Lesquelles des conditions suivantes donnent des sous-groupes distingués de G ?
(i) $a_{11} = 1$ (ii) $a_{12} = 0$ (iii) $a_{11} = a_{22}$ (iv) $a_{11} = a_{22} = 1$.
- b) Pour les cas où on a un sous-groupe distingué, décrire le groupe quotient.

Exercice 4. Donner tous les sous-groupes du groupe $S_3 \times S_3$. Lesquels sont-ils distingués?

Exercice 5.

- (1) Soit $G = (\mathbb{R}^*, \times)$ et $H = \mathbb{R}_+^*$. Décrire le groupe quotient G/H .
- (2) Montrer que le quotient \mathbb{C}/\mathbb{R} est isomorphe à \mathbb{R} . (Pour l'addition)

Exercice 6. Soit $H = \{\pm 1, \pm i\}$ le sous-groupe de quatrième racines d'unité de $G = \mathbb{C}^*$ avec multiplication.

- a) Décrire explicitement les classes latérales de H dans G .
- b) Montrer que G/H est isomorphe à G .

Exercice 7. Soit H et K deux sous-groupes distingués du groupe G .

- (1) Montrer que $H \cap K$ est un sous-groupe distingué de G .
- (2) Dans le cas où $H \cap K = \{e\}$, montrer que $HK = \{hk \mid h \in H, k \in K\}$ est un sous-groupe distingué de G .

Exercice 8. Soit G un groupe, et $N < G$ un sous-groupe distingué et $H < G$ un sous-groupe quelconque.

- a) Montrer que $HN = \{hn \mid h \in H, n \in N\}$ est un sous-groupe de G .
- b) Montrer que $H \cap N$ est un sous-groupe distingué de H .
- c) Vérifier que l'application $\phi : H \rightarrow \frac{HN}{N}$, $\phi(h) = hN$ est un homomorphisme surjectif. Décrire $\text{Ker}\phi$.
- d) Dédurre que $\frac{H}{H \cap N}$ et $\frac{HN}{N}$ sont isomorphes.

Exercice 9. Soit G un groupe, et H, K deux sous-groupes distingués et $K < H$.

- a) Vérifier que l'application $\theta : G/K \rightarrow G/H$, $\theta(gK) = gH$ est un homomorphisme surjectif. Décrire $\text{Ker}\theta$.
- b) Dédurre que $\frac{G}{H}$ et $\frac{G/K}{H/K}$ sont isomorphes.

Exercice 10 (Groupes simples).

Soit G un groupe tel que G ne contient aucun sous-groupe distingué non trivial. (Un tel groupe est appelé groupe *simple*)

- (1) Soit H un autre groupe quelconque. Montrer que tout morphisme $f : G \rightarrow H$ est soit injectif, soit constant.
- (2) Montrer que si G est un groupe fini abélien et simple, alors G est isomorphe à $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ avec p premier.

Exercices supplémentaires

Exercice 11. Soit H un sous-groupe du groupe G et $L := \bigcap_{g \in G} gHg^{-1}$. Montrer que L est un sous-groupe normal (ou distingué) de G .

Exercice 12.

Soit $(G, +)$ le groupe quotient $(\mathbb{Q}, +)$ par \mathbb{Z} . Pour $x \in \mathbb{Q}$, on note $x + \mathbb{Z} \in G$ la classe de x dans \mathbb{Q}/\mathbb{Z} .

- (1) Montrer que $\frac{35}{6} + \mathbb{Z} = \frac{5}{6} + \mathbb{Z}$. En déduire l'ordre de $\frac{35}{6} + \mathbb{Z}$ dans G .
- (2) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{Q}$, il existe $\alpha(x) \in \mathbb{Q} \cap [0, 1[$ tel que $x + \mathbb{Z} = \alpha(x) + \mathbb{Z}$.
- (3) Montrer que tout élément de G est d'ordre fini.
- (4) Montrer que G n'est pas d'exposant fini. ($\nexists n \in \mathbb{N}, \forall x \in G, n \times x = e$)

Exercice 13.

Soit $G = (\text{GL}(2, \mathbb{R}), \times)$ le groupe des matrices inversibles. On note

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid n \in \mathbb{Z} \right\}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

- (1) Montrer que H est un sous-groupe abélien de G .
- (2) Montrer que H est engendré par un seul élément. Est-ce que H est distingué dans G ?
- (3) Montrer que $\Phi : (\mathbb{Z}, +) \rightarrow G$, $\Phi(n) = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ est un homomorphisme de groupes.
- (4) Déterminer l'ordre de A et de B dans G .
- (5) Montrer que H est contenu dans le sous-groupe engendré $K = \langle A, B \rangle$.
- (6) Que pensez-vous des deux assertions suivantes ?
 - Un groupe engendré par des éléments d'ordre fini est fini.
 - Un groupe engendré par des éléments d'ordre fini ne contient que des éléments d'ordre fini.

Exercice 14. Montrer que si $G/Z(G)$ ($Z(G) = \{g \in G \mid gx = xg \ \forall x \in G\}$ est le centre de G) est engendré par un seul élément, alors G est abélien.

Exercice 15. Soit G un groupe et $H < G$ un sous-groupe. Soit

$$N := N_G(H) := \{g \in G \mid gHg^{-1} = H\}.$$

On l'appelle le *normalisateur* de H dans G . Montrer:

- a) N est un sous-groupe de G .
- b) $H \triangleleft N$.
- c) $H \triangleleft G$ si et seulement si $G = N$.
- d) Il y a une application bijective entre les ensembles $\{gHg^{-1} \mid g \in G\}$ et $\{gN \mid g \in G\}$

Exercice 16. Soit H un sous-groupe du groupe G . On dit que H est un sous-groupe *caractéristique* de G , si $\varphi(H) \subset H$ pour tout $\varphi \in \text{Aut}(G)$.

- a) Montrer: Tout sous-groupe caractéristique est un sous-groupe normal.
- b) Montrer: Tout sous-groupe caractéristique d'un sous-groupe normal H de G est un sous-groupe normal de G .
- c) Est-il vrai que tout sous-groupe normal d'un sous-groupe normal H de G est un sous-groupe normal de G ?