Faculté des Sciences
Aix-Marseille Université

Licence de mathématiques 2015/16
3e année, 2e semestre, 1er session
Structures Algébriques, SMI6U10TC

Examen Final
lundi 9 mai 2016
Durée 3heures

☐ Aix-Montperrin
☐ Aubagne–SATIS
☐ Luminy
☒ Saint-Charles
☐ Saint-Jérôme
☐ Château-Gombert

Trois heures, ni calculatrices, ni documents

Enseignants : H. Short, K. Oeljeklaus, P. Mercat

Partout on utilise la notation $\mathbb{Z}_n$ pour denoter le groupe, ou anneau, $\frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}$, où $n \in \mathbb{N}$.

Exercice I. (5,5 points)

a) Soit G un groupe fini d'ordre m et soit $n \in \mathbb{N}$ qui divise m.
Que peut-on dire sur l'existence des sous–groupes d'ordre n quand n est :
i) premier ; ii) une puissance d'un nombre premier ; iii) un nombre composé ?
b) Considérer les polynômes $f(X) = X^3 - 2$ et $g(X) = X^3 - X - 2$ dans $\mathbb{Z}_5[X]$.
i) Est–ce que $f(X)$ et $g(X)$ sont–ils irréductibles dans $\mathbb{Z}_5[X]$?
ii) Est ce que les anneaux quotients $\frac{\mathbb{Z}_5[X]}{\langle f(X)\rangle}$, $\frac{\mathbb{Z}_5[X]}{\langle g(X)\rangle}$ sont :
a) commutatifs ? b) sans diviseurs de zéro ?
iii) Combien d'éléments y a–t–il dans l'anneaux quotient $\frac{\mathbb{Z}_5[X]}{\langle g(X)\rangle}$?
iv) Est-ce que les anneaux quotients $\frac{\mathbb{Z}_5[X]}{\langle f(X)\rangle}$ et $\frac{\mathbb{Z}_5[X]}{\langle g(X)\rangle}$ sont des corps ?

Exercice II. (7,5 points)

Soit p un nombre premier et $\mathbb{F}_p := \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_p$ muni de l'addition et de la multiplication induite par l'anneau $\mathbb{Z}$.
a) Montrer que $\mathbb{F}_p$ est un corps.
b) Soit $G := GL(2, \mathbb{F}_p) = \{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid ad - bc \neq 0, \quad a, b, c, d \in \mathbb{F}_p\}$, l'ensemble des matrices 2×2 inversibles à coefficients dans $\mathbb{F}_p$. Montrer que G muni de la multiplication matricielle est un groupe. Ce groupe est-il abélien ?
c) Soit $V := \mathbb{F}_p \times \mathbb{F}_p = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{F}_p\}$. Constater que V est de manière naturelle un $\mathbb{F}_p$-espace vectoriel. De quelle dimension ? Calculer le cardinal de V.
d) On considère l'action linéaire de G sur V :

$$\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) \mapsto \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix}.$$

i) Décrire les orbites du groupe G dans V.
ii) Soit $q = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in V$. Déterminer le sous-groupe stabilisateur $G_q \subset G$ du point q. Quel est l'ordre de ce sous-groupe ?
iii) Utiliser c) pour calculer l'ordre de G.

Exercice III. (7,5 points)

a) Soient p et q deux nombres premiers avec $p < q$ et tels que p ne divise pas $q^2 - 1$.
i) Montrer que tout groupe d'ordre p^2q^2 est abélien.
ii) Donner trois couples de nombres premiers p, q satisfaisant à ces hypothèses.

b) Soit G un groupe fini ayant au moins 3 éléments. Montrer qu'il y a au moins 3 classes de conjugaison dans G.

c) Soit G un groupe fini et N un sous-groupe distingué de G. Soit P un p-Sylow de N. Montrer que $G = N \cdot N_G(P)$, où $N_G(P)$ est le normalisateur de P dans G (on rappelle que $N_G(P) = \{g \in G \mid g \cdot P \cdot g^{-1} = P\}$).

Exercice IV. (4 points)

Soit $(A, +, \cdot)$ un anneau intègre, c'est-à-dire unitaire commutatif et sans diviseurs de zéro. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes.
(i) A est un corps.
(ii) A admet exactement deux idéaux.
(iii) A n'admet qu'un nombre fini d'idéaux.
En déduire que tout anneau intègre fini est un corps.