L3, STRUCTURES ALGÉBRIQUES UE: ENSMI6UX 2014–15

TD5. Théorèmes de Sylow

Partout ici p est un nombre premier

Exercice 1. Soient G un groupe fini et H un sous-groupe distingué de G. Montrer que si H et G/H sont des p-groupes, il en est de même de G.

Exercice 2. Soit G un p-groupe et H un sous-groupe distingué de G. Montrer que $H \cap Z(G)$ n'est pas réduit à l'élément neutre.

Exercice 3. Montrer que tout groupe d'ordre 35 est cyclique (compter le nombre de 7–sous–groupes de Sylow et de 5–sous–groupes de Sylow).

b) Soit G d'ordre pq avec p, q deux premiers t.q. $p > q$ et q ne divise pas $(p-1)$.
Montrer que G est cyclique.

Exercice 4. Soit G un p-groupe d'ordre p^r.

(a) Montrer que pour tout entier $1 \leq k \leq r$, G possède un sous-groupe distingué d'ordre p^k.

(b) Montrer qu'il existe une suite $G_0 = 1 < G_1 < \cdots < G_r = G$ de sous-groupes G_i distingués d'ordre p^i $(i = 1, \ldots, r)$.

(c) Montrer que pour tout sous-groupe H de G d'ordre p^s avec $s < r$, il existe un sous-groupe d'ordre p^{s+1} de G qui contient H.

Exercice 5. Soit G un groupe non commutatif d'ordre 8.

(a) Montrer que G contient un élément a d'ordre 4 et que le sous-groupe H de G engendré par a est distingué dans G.

(b) On suppose ici qu'il existe un élément b de $G \setminus H$ qui est d'ordre 2. Soit K le sous-groupe engendré par b. Dans ce cas $G = HK = \{a^i b^j \mid i = 0, 1, 2, 3, \ j = 0, 1\}$ avec $H \triangleleft G$. On dit que dans ce cas G est isomorphe au produit semi-direct de H par K. Le groupe est alors isomorphe au groupe diédral D_4, le groupe de symétries du carré.

(c) Dans le cas contraire, soit b un élément d'ordre 4 de G n'appartenant pas à H. Montrer que a^2 est le seul élément d'ordre 2 de G, que le centre $Z(G)$ de G est égal à $\{1, a^2\}$. On pose $-1 = a^2$. Montrer que a et b vérifient les relations suivantes : $a^2 = b^2 = -1, bab^{-1} = a^{-1}$. Enfin on pose $ab = c$. Vérifier les relations suivantes :

$$a^2 = b^2 = c^2 = -1 \quad ab = -ba = c \quad bc = -cb = a \quad ca = -ac = b$$

(l'écriture $-x$ signifiant ici $(-1)x$). Ce dernier groupe est le groupe des quaternions.

Exercice 6. Soient G un groupe et H un sous-groupe distingué de G. On se donne un nombre premier p et l'on suppose que H admet un unique p-sous–groupe de Sylow S. Montrer que S est distingué dans G.

Exercice 7. Montrer qu'un groupe d'ordre 200 n'est pas simple.

Exercice 8. Déterminer les sous-groupes de Sylow du groupe alterné A_5.

Exercice 9. Pour p un nombre premier, déterminer le nombre de p-sous-groupes de Sylow du groupe symétrique S_p.

Exercice 10. Soient p, q deux nombres premiers. Montrer qu'il n'existe pas de groupe simple d'ordre $p^2 q$.

Date: March 5, 2018.