

TD4 Actions des Groupes

Rappels de cours : Une action de G sur l'ensemble non vide X est un homomorphisme $G \rightarrow \text{Sym}(X)$, où $\text{Sym}(X)$ est le groupe de bijections de X . Donc on a $G \times X \rightarrow X, (g, x) \rightarrow g \cdot x$ tel que $e \cdot x = x$ et $(gh) \cdot x = g \cdot (h \cdot x)$ pour tout $x \in X$, pour tout $g, h \in G$.

$O_x = \{g \cdot x \mid g \in G\}$ est l'orbite de x . $X^g = \text{Fix}(g) = \{x \mid g \cdot x = x\}$. $G_x = \text{Stab}(x) = \{g \mid g \cdot x = x\}$ est le stabilisateur de x (un sous-groupe de G). Action transitive si $X = O_x$. Simplement transitive si transitive et $G_x = \{e\}$ (pour un, donc tous, $x \in X$). On voit que "être dans la même orbite" est une relation d'équivalence.

-
- a) Montrer que $y \in O_x \implies G_y$ est un conjugué de G_x .
 - b) Montrer que l'action induit une action de G sur $\mathcal{P}(X) = 2^X$.
 - c) (i) Montrer que $G \times G \rightarrow G, (g, h) \rightarrow gh$ définit une action (translation à gauche). Décrire $O_h, G^g = \text{Fix } g, G_h = \text{Stab}(h)$.
 (ii)+(iii) Même chose pour $G \times G \rightarrow G, (g, h) \rightarrow hg^{-1}$ (translation à droite et pour $G \times G, (\gamma, g) \rightarrow \gamma g \gamma^{-1}$ définit une action (conjugaison). Décrire O_h, G^g, G_h .
 (iv) Pour l'action de conjugaison d'un groupe fini G , montrer que $|O_x| = |G|/|G_x|$. Comme $G = \cup_{y \in G} O_y$, déduire que $|G| = |Z(G)| + \sum_{i=1}^n |G|/|G_{x_i}|$ où n est le nombre d'orbites d'au moins 2 éléments, et $\{x_i\}$ est une collection contenant un représentant pour chacune de ces orbites, donc ...
 (v) Soit G un groupe fini agissant sur un ensemble fini X . Compter les éléments de l'ensemble $\{(g, x) \in G \times X \mid g \cdot x = x\}$ de deux façons différentes. Montrer que $n = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |X^g|$, où n est le nombre d'orbites de l'action : la formule de Burnside.

Les symétries du dodécaèdre

Ici on va étudier le groupe $\text{Sym}(\text{Dodeca})$ des symétries du dodécaèdre.

- 1) Construire un dodécaèdre, avec le papier adjoit.
- 2) Combien d'éléments y a-t-il correspondant aux rotations autour des axes passant par deux sommets opposés? Quel est leur ordre? Combien d'éléments de cet ordre y a-t-il?
- 3) Combien d'éléments y a-t-il correspondant aux rotations autour des axes passant par deux centres de faces opposés? Quel est leur ordre? Combien d'éléments de cet ordre y a-t-il?
- 4) Combien d'éléments y a-t-il correspondant aux rotations autour des axes passant par deux mi-points des arêtes opposés? Quel est leur ordre? Combien de éléments de cet ordre y a-t-il?
- 5) Quel est l'ordre du groupe $\text{Sym}(\text{Dodeca})$?
- 6) Vérifier que les arêtes de couleurs forment une collection de 5 cubes inscrits.
- 7) Vérifier que le groupe de symétries du dodécaèdre agit fidèlement et transitivement sur cette collection de cubes.
- 8) Déduire que le groupe de symétries est isomorphe à un sous-groupe de S_5 , et identifier ce sous-groupe.

Les sous-groupes finis de $SO_3(\mathbb{R})$

Soit $G \neq 1$ un sous-groupe fini de $SO_3(\mathbb{R}) = \{M \in GL_3(\mathbb{R}) \mid M^T M = M M^T = I, \det(M) = 1\}$. Notons $X \subset S^2$ l'ensemble $\{x \in S^2 \mid \exists g \in G - \{id\}, g \cdot x = x\}$.

a) Montrer que G agit sur X et déterminer $|X^g|$ pour chaque $g \neq id$ (noter que toute matrice $M \in SO_3(\mathbb{R})$ possède une valeur propre réelle, donc un vecteur propre — elle correspond alors à une rotation).

b) Soit N le nombre d'orbites, x_1, \dots, x_N un point dans chaque orbite. Comme avec Burnside, compter les éléments de l'ensemble $\{(g, x) \in (G - \{id\}) \times X \mid g \cdot x = x\}$ de deux façons différentes pour montrer que

$$2 \left(1 - \frac{1}{|G|}\right) = \sum_{i=1}^N \left(1 - \frac{1}{|G_{x_i}|}\right).$$

c) En déduire que N ne peut prendre que les valeurs 2 ou 3 (le coté gauche est au plus 2, le coté droite au moins $N/2$...).

d) Décrire G quand $N = 2$.

e) Lorsque $N = 3$ il y a quatre cas:

- 2 orbites où les éléments ont stabilisateur d'ordre 2, une d'ordre n , et $|G| = 2n$
- une orbite où les éléments ont stabilisateur d'ordre 2, deux d'ordre 3, et $|G| = 12$
- une orbite où les éléments ont stabilisateur d'ordre 2, une de 3 et une de 4, et $|G| = 24$
- une orbite où les éléments ont stabilisateur d'ordre 2, une de 3 et une de 5, et $|G| = 60$.

Décrire les configurations des points de X et les actions des groupes G .